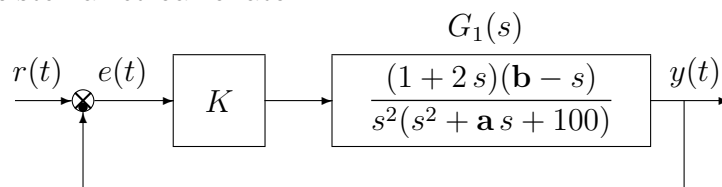


Controlli Automatici B
11 Gennaio 2010 - Esercizi
Compito Nr. a = 3 b = 5

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Negli esercizi che seguono, si sostituisca ad **a** e **b** i valori assegnati e si risponda alle domande.

a1) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro K . Tracciare il luogo delle radici sia per $K > 0$ che per $K < 0$. Determinare esattamente la posizione degli asintoti, le intersezioni ω^* con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno K^* . Determinare la posizione dei punti di diramazione "solo in modo qualitativo".

Sol. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K_1 G_1(s) = 0 \quad \leftrightarrow \quad 1 - 2K \frac{(s + 0.5)(s - b)}{s^2(s^2 + as + 100)} = 0$$

dove $K_1 = -2K$. Gli andamenti qualitativi dei luoghi delle radici del sistema $G_1(s)$ al variare di $K_1 > 0$ e di $K_1 < 0$ quando **a** = 3 e **b** = 5 sono mostrati in Fig. 1. Sono presenti due asintoti.

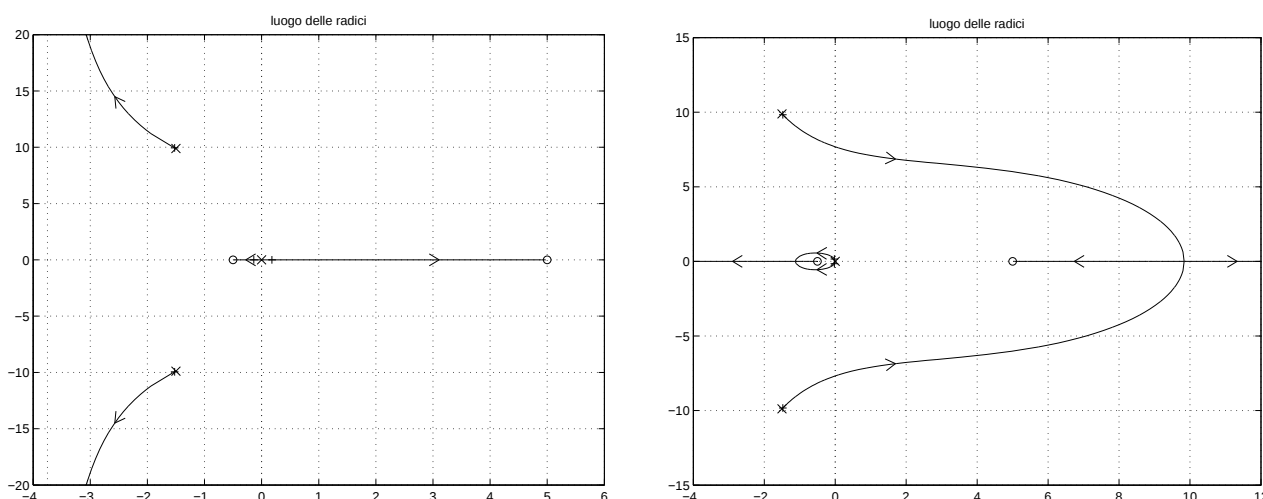


Figura 1: Luoghi delle radici del sistema $G_1(s)$ al variare di $K_1 > 0$ e di $K_1 < 0$ quando **a** = 3 e **b** = 5.

Il centro degli asintoti è il seguente:

$$\sigma_a = \frac{1}{2}(-b - a + 0.5) \quad \xrightarrow{a=3, b=5} \quad \sigma_a = -3.75.$$

Gli asintoti sono verticali per $K_1 > 0$ e coincidono con l'asse reale per $K_1 < 0$. L'intersezione con l'asse immaginario si calcola applicando il criterio di Routh alla seguente equazione caratteristica:

$$1 + \frac{K(b-s)(1+2s)}{s^2(s^2+as+100)} = 0 \quad \rightarrow \quad s^4 + as^3 + (100 - 2K)s^2 + K(2b-1)s + Kb = 0.$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

4	1	100 - 2K	Kb
3	a	K(2b-1)	
2	$K(1-2a-2b)+100a$	Kab	
1	$K(2b-1)[K(1-2a-2b)+100a] - Ka^2b$		
0	Kab		

Dalla riga 2 e dalla riga 0 si ricavano i seguenti vincoli:

$$K < \frac{100\mathbf{a}}{(2\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - 1)}, \quad K > 0$$

Dalla riga 1 si ottiene la seguente disequazione:

$$K[K(1 - 2\mathbf{a} - 2\mathbf{b})(2\mathbf{b} - 1) + 100\mathbf{a}(2\mathbf{b} - 1) - \mathbf{a}^2\mathbf{b}] > 0$$

da cui, essendo $K > 0$ si ricava:

$$K(1 - 2\mathbf{a} - 2\mathbf{b})(2\mathbf{b} - 1) + 100\mathbf{a}(2\mathbf{b} - 1) - \mathbf{a}^2\mathbf{b} > 0$$

Risolvendo rispetto a K si ottiene:

$$K < \frac{100\mathbf{a}(2\mathbf{b} - 1) - \mathbf{a}^2\mathbf{b}}{(2\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - 1)(2\mathbf{b} - 1)} = K^*$$

Tale relazione riscritta nel modo seguente

$$K < \frac{100\mathbf{a}}{(2\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - 1)} - \frac{\mathbf{a}^2\mathbf{b}}{(2\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - 1)(2\mathbf{b} - 1)} = K^*$$

mette in evidenza che si tratta di una relazione più stringente di quella ottenuta dalla riga 2. Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per

$$0 < K < K^*$$

Nel caso $\mathbf{a} = 3$ e $\mathbf{b} = 5$ si ha: $K^* = 19.67$. Per $K = K^*$ il luogo delle radici interseca l'asse immaginario. La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{K^*(2\mathbf{b} - 1)}{\mathbf{a}}} = \sqrt{\frac{100(2\mathbf{b} - 1) - \mathbf{a}\mathbf{b}}{(2\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - 1)}}$$

Nel caso $\mathbf{a} = 3$ e $\mathbf{b} = 5$ si ha: $\omega^* = 7.6811$.

a.2) Si consideri la seguente equazione caratteristica:

$$m_p s^3 + \mathbf{a} m_p s^2 + \mathbf{b} s + \mathbf{a} = 0$$

Mostrare graficamente come si muovono sul piano complesso le radici dell'equazione caratteristica al variare del parametro $m_p > 0$. Determinare la posizione dei punti di diramazione "solo in modo qualitativo". Calcolare esattamente il centro e la posizione degli asintoti.

Sol. Applicando Routh a questa equazione caratteristica si ottiene:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & m_p & \mathbf{b} \\ 2 & \mathbf{a} m_p & \mathbf{a} \\ 1 & \mathbf{b} - 1 & \\ 0 & \mathbf{a} & \end{array}$$

Le radici dell'equazione caratteristica sono sempre tutte a parte reale negativa se $m_p > 0$, $\mathbf{a} > 0$ e $\mathbf{b} > 1$. L'equazione caratteristica può essere riscritta separando i termini che moltiplicano il parametro K_v da quelli che non lo moltiplicano:

$$s^3 + (\mathbf{a} + \mathbf{b})s + K_v(s^2 + \mathbf{b}) = 0$$

L'equazione caratteristica può essere riscritta separando i termini che moltiplicano il parametro m_p da quelli che non lo moltiplicano:

$$\mathbf{b} s + \mathbf{a} + m_p s^2(s + \mathbf{a}) = 0$$

Dividendo l'equazione caratteristica per il polinomio che non moltiplica il parametro K_v si ottiene la seguente forma $1 + K_v G_1(s) = 0$:

$$1 + \frac{m_p s^2(s + \mathbf{a})}{\mathbf{b} s + \mathbf{a}} = 0 \quad \leftrightarrow \quad 1 + \frac{m_p s^2(s + \mathbf{a})}{\mathbf{b}(s + \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}})} = 0$$

I poli e gli zeri della funzione $G_1(s)$ sono i seguenti:

$$p_1 = -\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}, \quad z_{1,2} = 0, \quad z_3 = -\mathbf{a}.$$

Il contorno delle radici al variare del parametro $m_p > 0$ quando $\mathbf{a} = 3$ e $\mathbf{a} = 5$ è mostrato in Fig. 2. Il contorno delle radici ha due asintoti verticali percorsi dall'infinito al finito perchè il

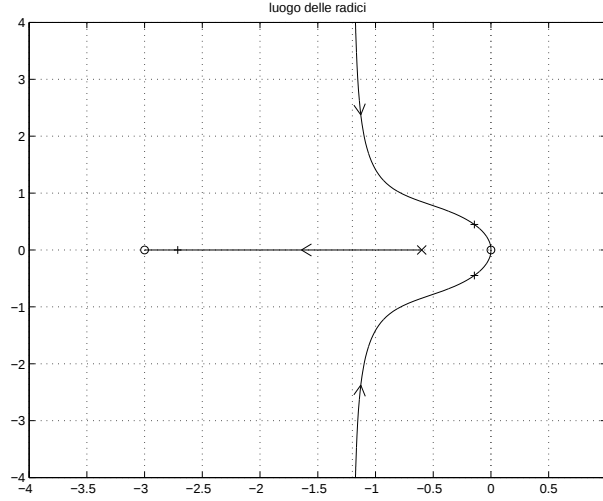
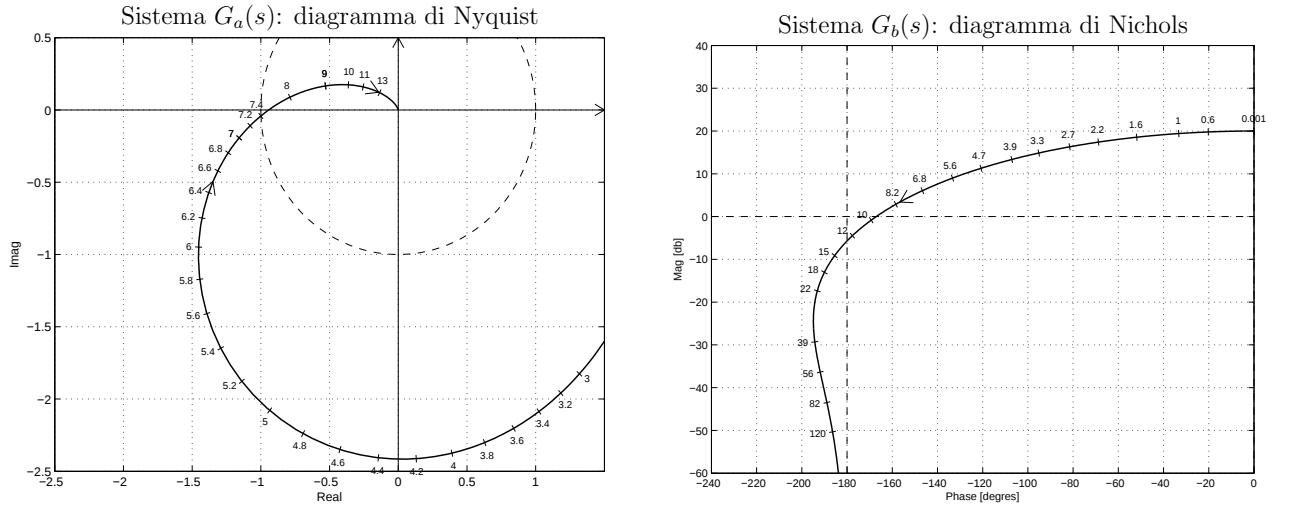


Figura 2: Contorno delle radici del sistema $G_1(s)$ al variare del parametro $m_p > 0$ quando $\mathbf{a} = 3$ e $\mathbf{a} = 5$.

grado relativo del sistema è negativo: $r = -2$. Il centro degli asintoti è il seguente:

$$\sigma_a = \frac{1}{-2} \left(-\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} + \mathbf{a} \right) \quad \xrightarrow{\mathbf{a}=3, \mathbf{b}=5} \quad \sigma_a = -1.2$$

b) Siano date le seguenti due funzioni di risposta armonica dei sistemi $G_a(s)$ e $G_b(s)$:



b.1) Per il sistema $G_a(s)$, progettare una rete correttiva in modo da garantire al sistema compensato un margine di fase $M_\varphi = (50 + \mathbf{a})^\circ$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno;

Sol. Il modulo e la fase del punto B corrispondente alla specifica $M_\varphi = (50 + \mathbf{a})^\circ$ sono i seguenti:

$$M_B = 1, \quad \varphi_B = (230 + \mathbf{a})^\circ.$$

Un punto A compatibile con la specifica di progetto richiesta è quello corrispondente alla pulsazione $\omega = 5$:

$$M_A = 2.28, \quad \varphi_A = 245.8^\circ \quad \rightarrow \quad M = \frac{M_B}{M_A} = 0.4386, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -12.8^\circ$$

La rete correttiva che si ottiene utilizzando le formule di inversione è la seguente:

$$\tau_1 = \frac{M - \cos \varphi}{\omega \sin \varphi} = 0.4844, \quad \tau_2 = \frac{\cos \varphi - \frac{1}{M}}{\omega \sin \varphi} = 1.1779 \quad \rightarrow \quad C_2(s) = \frac{1 + 0.4844 s}{1 + 1.1779 s}$$

I diagrammi di Nyquist delle funzioni $G_a(s)$ e $C_1(s) G_a(s)$ per $\mathbf{a} = 3$ sono mostrati in Fig. 3.

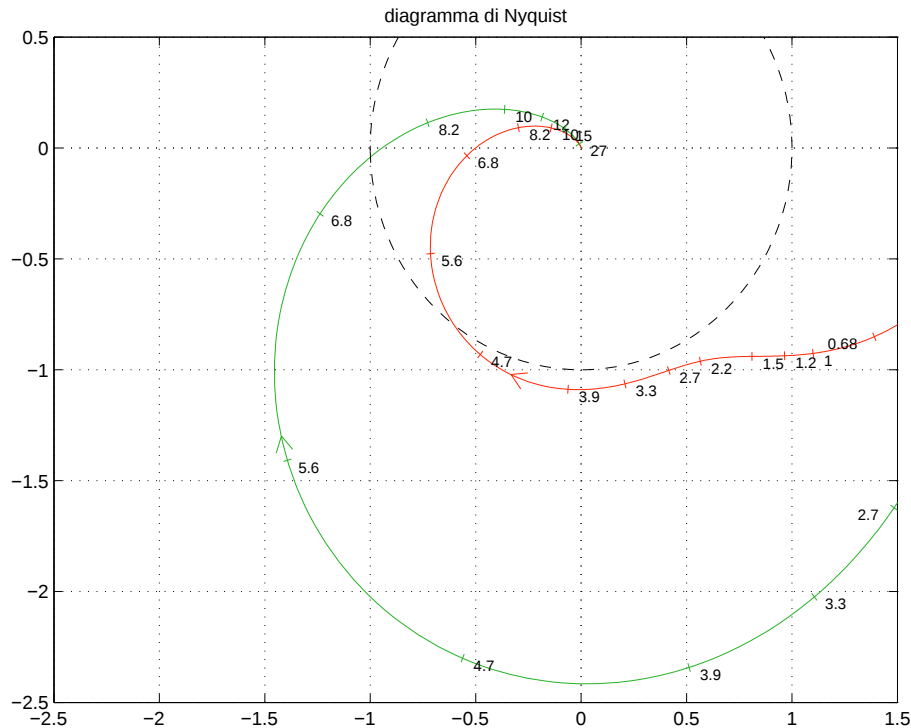


Figura 3: di Nyquist delle funzioni $G_a(s)$ e $C_1(s) G_a(s)$ per $\mathbf{a} = 3$.

- b.2) Per il sistema $G_b(s)$, progettare una rete correttiva $C_2(s)$ in modo da garantire al sistema compensato un margine di fase $M_\varphi = (40 + 2\mathbf{a})^\circ$ e una ampia larghezza di banda $\omega_{f0} = 56$ per il sistema retroazionato.

Sol. Modulo e fase del punto $B = ((-140 + 2 \mathbf{a})^\circ, 0 \text{ db}) \stackrel{\mathbf{a}=3}{=} (-134^\circ, 0 \text{ db}) = (226^\circ, 0 \text{ db})$:

$$M_B = 1, \quad \varphi_B = 226^\circ$$

Il punto A caratterizzato dalla pulsazione $\omega = 56$ può essere portato in B usando una rete anticipatrice.

$$M_A = 0.0152 = -36.36 \text{ db}, \quad \varphi_A = 168.1^\circ$$

I parametri da utilizzare nelle formule di inversione sono:

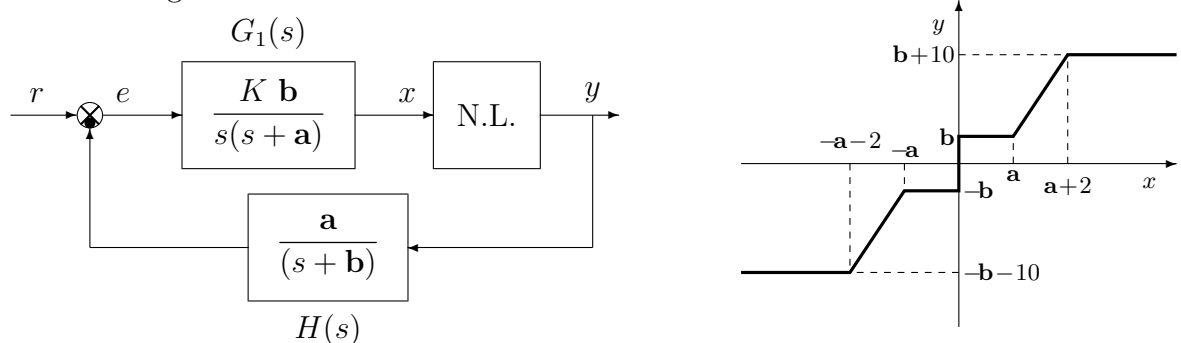
$$M = \frac{M_B}{M_A} = 65.78, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = 57.88^\circ$$

La rete anticipatrice che si ottiene utilizzando le formule di inversione è la seguente:

$$\tau_1 = \frac{M - \cos \varphi}{\omega \sin \varphi} = 1.376, \quad \tau_2 = \frac{\cos \varphi - \frac{1}{M}}{\omega \sin \varphi} = 0.01089 \quad \rightarrow \quad C_2(s) = \frac{1 + 1.376 s}{1 + 0.01089 s}$$

I diagrammi di Nichols delle funzioni $G_b(s)$ e $C_2(s) G_b(s)$ per $\mathbf{a} = 3$ sono mostrati in Fig. 4.

- c) Si consideri il seguente sistema non lineare retroazionato:



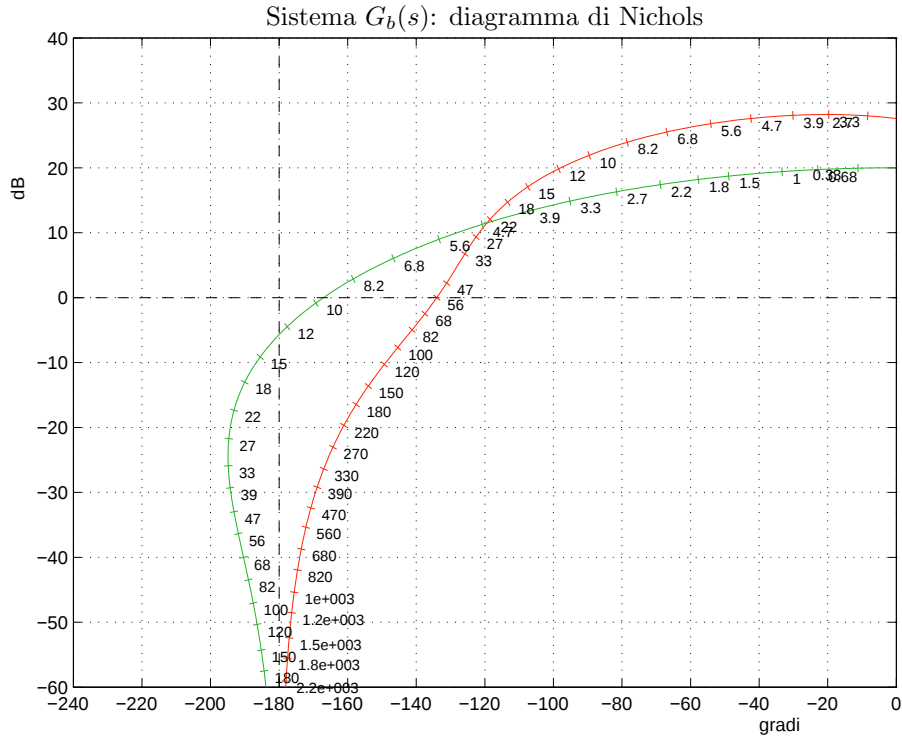


Figura 4: Diagrammi di Nichols delle funzioni $G_b(s)$ e $C_2(s)G_b(s)$ per $\mathbf{a} = 3$.

- c.1) Posto $K = 1$, determinare il valore dell'ingresso $r = r^*$ a cui corrisponde il punto di lavoro $(x_0, y_0) = (\mathbf{a} + 1, \mathbf{b} + 5)$.

Sol. Il guadagno statico del sistema $G_1(s)$ è infinito per cui la retta di carico è orizzontale:

$$y = \frac{r}{K_2 K_3} \quad \text{dove} \quad K_2 = 1, \quad K_3 = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$$

Il valore r^* si determina imponendo $y = y_0$:

$$\frac{r^*}{K_2 K_3} = \mathbf{b} + 5, \quad r^* = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}(\mathbf{b} + 5) \quad \xrightarrow{\mathbf{a}=3, \mathbf{b}=5} \quad r^* = 6.$$

- c.2) Posto $K = 1$, $r = r^*$ ed utilizzando il criterio del cerchio, dire se il sistema retroazionato è stabile nell'intorno del punto di lavoro $(x_0, y_0) = (\mathbf{a} + 1, \mathbf{b} + 5)$.

Sol. Le pendenze delle 2 rette che racchiudono a settore tutta la non linearità nell'intorno del punto $(\mathbf{a} + 1, \mathbf{b} + 5)$ sono:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 5.$$

In questo caso il cerchio critico degenera in un semipiano delimitato dalla retta verticale

$$x = -\frac{1}{\beta} = -\frac{1}{5}$$

Per $K = 1$, il guadagno d'anello del sistema è:

$$G(s) = G_1(s) H(s) = \frac{\mathbf{a} \mathbf{b}}{s(s + \mathbf{a})(s + \mathbf{b})}.$$

Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ ha un asintoto verticale nella posizione:

$$\sigma_a = -\left(\frac{1}{\mathbf{a}} + \frac{1}{\mathbf{b}}\right)$$

Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ non interseca il semipiano critico se:

$$|\sigma_a| < \frac{1}{5} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\mathbf{a}} + \frac{1}{\mathbf{b}} < \frac{1}{5} \quad \rightarrow \quad \frac{5(\mathbf{a} + \mathbf{b})}{\mathbf{a} \mathbf{b}} < 1.$$

Per i valori di **a** e **b** che soddisfano la precedente relazione si può concludere che l'origine è un punto di lavoro asintoticamente stabile. In tutti gli altri casi non si può dire niente perchè il criterio del cerchio è solo un criterio sufficiente.

- c.3) Disegnare in modo qualitativo l'andamento della funzione descrittiva $F(X)$ della non linearità $y = y(x)$ nell'intorno del punto $(0, 0)$. Utilizzare le variabili $m_1, m_2, \dots$ per rappresentare gli eventuali valori non noti minimi e massimi della funzione $F(X)$.

Sol. L'andamento qualitativo della funzione descrittiva $F(X)$ quando **a** = 3 e **b** = 5 è mostrato in Fig. 5. Per $X < \mathbf{a}$ la funzione descrittiva $F(X)$ ha la seguente forma:

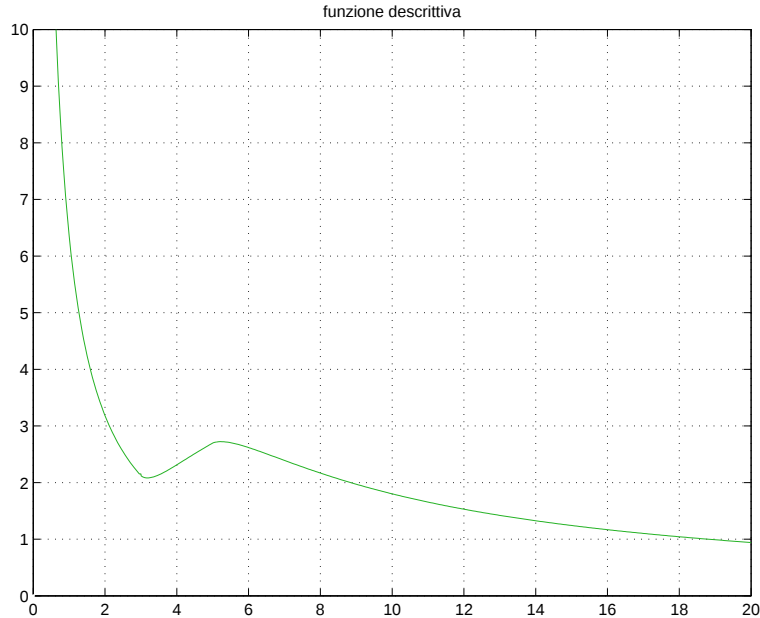


Figura 5: Andamento della funzione descrittiva $F(X)$ quando **a** = 3 e **b** = 5.

$$F(X) = \frac{4\mathbf{b}}{\pi X}.$$

Il minimo locale m_0 della funzione descrittiva $F(X)$ ha il seguente valore:

$$m_0 = \left. \frac{4\mathbf{b}}{\pi X} \right|_{X=\mathbf{a}} \xrightarrow{\mathbf{a}=3, \mathbf{b}=5} m_0 = \frac{20}{3\pi} = 2.12.$$

Indichiamo con m_1 il massimo locale della funzione $F(X)$.

- c.4) Discutere “qualitativamente” anche in funzione dei parametri $m_1, m_2, \dots$ l'esistenza o meno di cicli limite nel sistema retroazionato al variare del guadagno $K > 0$.

Sol. Per $K = 1$, il margine di ampiezza K^* del sistema $G(s)$ è $K^* = \mathbf{a} + \mathbf{b}$. Per $K \neq 0$, il margine di ampiezza $\bar{K}^*$ del sistema $G(s)$ è $\bar{K}^* = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{K}$. Al variare di $\bar{K}^*$ si hanno quindi queste 3 possibili soluzioni:

- 1) $\bar{K}^* > m_1$: la funzione $-1/F(X)$ interseca il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ in un solo punto. Il corrispondente ciclo limite è stabile.
- 2) $m_0 < \bar{K}^* < m_1$: il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ interseca la funzione $-1/F(X)$ in 3 punti a cui corrispondono 2 cicli limite stabili (quelli uscenti) e uno instabile (quello entrante).
- 3) $\bar{K}^* < m_0$: il diagramma di Nyquist della $G(s)$ interseca la funzione $-1/F(X)$ in un solo punto a cui corrisponde un ciclo limite stabile.

- c.5) Posto $K = 1$, determinare la pulsazione ω^* e l'ampiezza X^* del ciclo limite stabile di ampiezza più piccola presente all'interno nel sistema retroazionato.

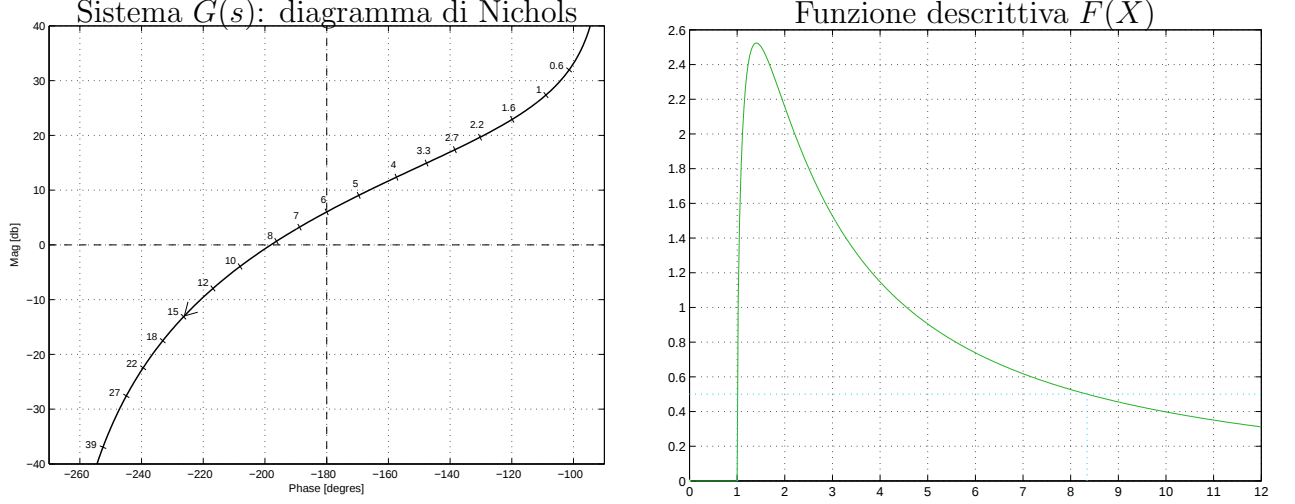
Sol. La pulsazione ω^* degli eventuali cicli limite stabili coincide con la pulsazione del punto di intersezione con il semiasse reale negativo:

$$\omega^* = \sqrt{ab} \quad a=3, b=5 \quad \omega^* = \sqrt{15} = 3.873$$

L'ampiezza X^* del ciclo limite si determina imponendo $F(X^*) = K^*$:

$$\frac{4b}{\pi X^*} = a + b \quad \longrightarrow \quad X^* = \frac{4b}{\pi(a+b)} \quad a=3, b=5 \quad X^* = \frac{5}{2\pi} = 0.7958$$

- d) Sia dato il diagramma di Nichols di un sistema $G(s)$ posto in retroazione negativa su di una non linearità $y = y(x)$ di cui viene fornita la funzione descrittiva $F(X)$.



- d.1) Nei limiti della precisione dei grafici forniti, determinare l'ampiezza X^* , la pulsazione ω^* e la stabilità degli eventuali cicli limite presenti nel sistema retroazionato.

Sol. Dal diagramma di Nichols risulta chiaro che il margine di ampiezza del sistema è $M_a = K^* = -6 \text{ db} = 0.5$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 6$. Imponendo $F(X) = K^*$, dal grafico della funzione $F(X)$ si ricava che in corrispondenza della pulsazione $\omega^* = 6$ all'interno del sistema retroazionato sono presenti due cicli limite con ampiezza $X_1^* \simeq 1$ e $X_2^* \simeq 8.5$, il primo instabile e il secondo stabile.

- d.2) Progettare i parametri τ_1 e τ_2 di una rete correttiva $C(s) = \frac{1+\tau_1 s}{1+\tau_2 s}$ da mettere in cascata al sistema $G(s)$ in modo che il sistema retroazionato abbia un ciclo limite stabile di ampiezza $X^* = 2$ in corrispondenza della pulsazione $\omega^* = 4$.

Sol. Per poter avere all'interno del sistema un ciclo limite con ampiezza $X^* = 2$, il margine di ampiezza $M_a = K^*$ del sistema dovrebbe essere $K^* = 2.15$. La rete correttiva deve quindi essere progettata in modo da far passare la funzione di risposta armonica del sistema compensato per il punto $B = -\frac{1}{K^*}$:

$$M_B = \frac{1}{K^*} = \frac{1}{2.15} = 0.4651, \quad \varphi_B = 180^\circ$$

Il punto A che deve essere portato in B è quello corrispondente alla pulsazione richiesta $\omega^* = 4$:

$$M_A = 4.154 = 12.37 \text{ db}, \quad \varphi_A = 202.6^\circ$$

I parametri da utilizzare nelle formule di inversione sono:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 0.1120, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -22.6^\circ$$

La rete ritardatrice che si ottiene utilizzando le formule di inversione è la seguente:

$$\tau_1 = \frac{M - \cos \varphi}{\omega \sin \varphi} = 0.5277, \quad \tau_2 = \frac{\cos \varphi - \frac{1}{M}}{\omega \sin \varphi} = 5.2078 \quad \longrightarrow \quad C(s) = \frac{1 + 0.5277 s}{1 + 5.2078 s}$$

I diagrammi di Nichols Nichols delle funzioni $G(s)$ e $C(s)G(s)$ sono mostrati in Fig. 6.

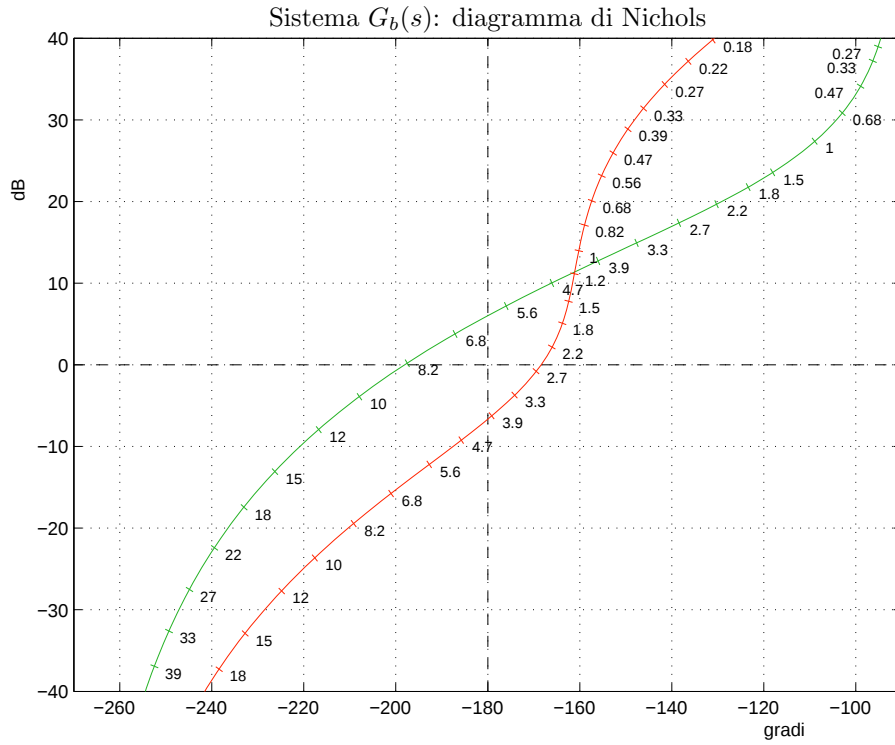


Figura 6: Diagrammi di Nichols delle funzioni $G(s)$ e $C(s)G(s)$.

e) Utilizzando il metodo delle differenze all'indietro, discretizzare la seguente rete correttrice:

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{(s + 2\mathbf{a})}{s(s + 1)}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento $T = 0.1$.

Sol. Utilizzando il metodo delle differenze all'indietro si ottiene:

$$D(z) = \left. \frac{(s + 2\mathbf{a})}{s(s + 1)} \right|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}} = \frac{T(1 + 2T\mathbf{a} - z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 + T - z^{-1})} = \frac{T + 2T^2\mathbf{a} - Tz^{-1}}{1 + T - (2 + T)z^{-1} + z^{-2}}$$

Per $T = 0.1$ si ha:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{0.1 + 0.02\mathbf{a} - 0.1z^{-1}}{1.1 - 2.1z^{-1} + z^{-2}}$$

La corrispondente equazione alle differenze assume la forma seguente:

$$m(k) = \frac{1}{1.1} [2.1m(k-1) - m(k-2) + (0.1 + 0.02\mathbf{a})e(k) - 0.1e(k-1)]$$

Per $\mathbf{a} = 3$ si ha:

$$m(k) = 1.9091m(k-1) - 0.9091m(k-2) + 0.1455e(k) - 0.0909e(k-1)]$$

f) Partendo da condizione iniziale nulla $y(0) = 0$, calcolare la risposta $y(n)$ al segnale $x(n) = 2^n$ del seguente sistema dinamico discreto:

$$y(n+1) = 0.5y(n) + \mathbf{b}x(n)$$

Sol. Applicando la Z-trasformata alla precedente equazione alle differenze con condizione iniziale nulla $y(0) = 0$ si ottiene:

$$Y(z) = \frac{\mathbf{b}}{z - 0.5} X(z) = \frac{\mathbf{b}z}{(z - 0.5)(z - 2)} = \frac{2\mathbf{b}}{3} \left[\frac{z}{(z - 2)} - \frac{z}{(z - 0.5)} \right]$$

Antitrasformando si ottiene:

$$y(n) = \frac{2\mathbf{b}}{3} [2^n - 0.5^n].$$

Controlli Automatici B
11 Gennaio 2010 - Domande Teoriche

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Rispondere alle domande e ai test che seguono. Per ciascuno dei test segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono giuste. La risposta al test è considerata corretta solo se tutte le affermazioni corrette sono state contrassegnate.

1. Scrivere la funzione di trasferimento discreta $G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ corrispondente alla seguente equazione alle differenze:

$$y_{n+3} + 4y_{n+2} + 5y_{n+1} + 3y_n = 7x_{n+2} + 2x_{n+1} \quad \rightarrow \quad G(z) = \frac{7z^2 + 2z}{z^3 + 4z^2 + 5z + 3}$$

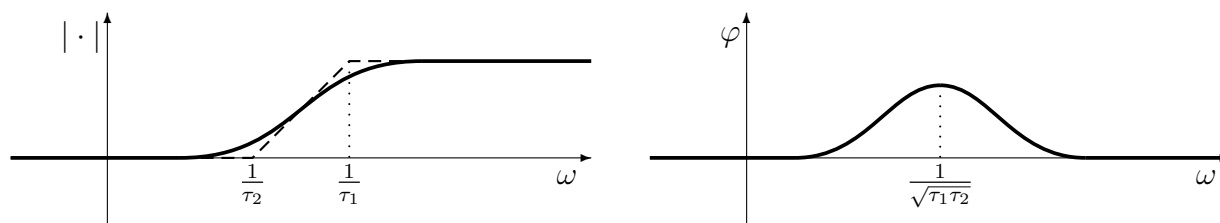
2. Sia $G(z)$ la $\mathcal{Z}$ -trasformata della successione numerica $g(k)$. Scrivere gli enunciati dei teoremi del valore iniziale e del valore finale:

$$g(0) = g(k)|_{k=0} = \lim_{z \rightarrow \infty} G(z), \quad g(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} g(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})G(z).$$

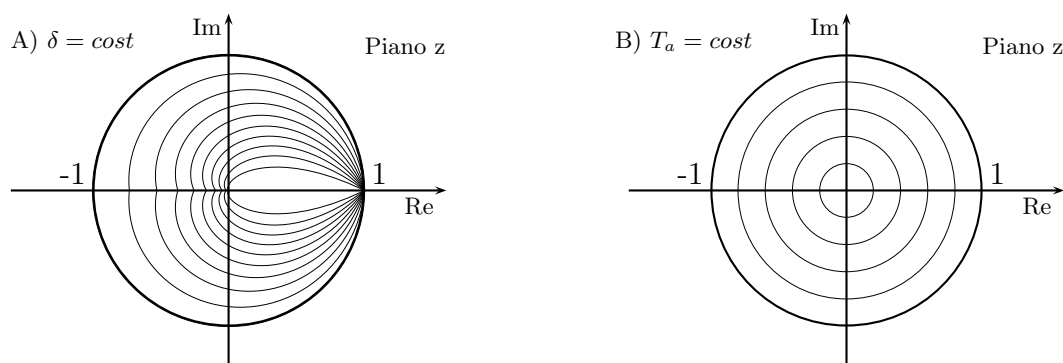
3. Il metodo di discretizzazione mediante trasformazione bilineare con *precompensazione* centrata sulla pulsazione ω_1 è basata sulla seguente sostituzione:

- ☐ $s = \frac{\tan T\omega_1}{2\omega_1} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$
☐ $s = \frac{2\omega_1}{\tan T\omega_1} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$
☐ $s = \frac{\tan \frac{T\omega_1}{2}}{\omega_1} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$
☒ $s = \frac{\omega_1}{\tan \frac{T\omega_1}{2}} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$

4. Tracciare i diagrammi di bode (moduli e fasi) di una rete anticipatrice $C(s) = \frac{(1+\tau_1 s)}{(1+\tau_2 s)}$, ($\tau_1 > \tau_2$):



5. Tracciare qualitativamente sul piano z : A) i luoghi a coefficiente di smorzamento δ costante; B) i luoghi a decadimento esponenziale costante:



6. Fornire l'enunciato del Teorema del baricentro: *La somma dei poli del sistema ottenuto chiudendo in retroazione un sistema dinamico descritto da una funzione di trasferimento $G(s)$ razionale fratta con ...*
polinomio a denominatore di grado superiore di almeno due a quello del polinomio a numeratore è indipendente dal valore del guadagno statico di anello e dalle posizioni degli zeri ed è uguale alla somma dei poli del sistema ad anello aperto.

7. In un sistema discreto a segnali campionati, qual è il legame che lega la variabile discreta z e la variabile s di Laplace?

$$z = e^{sT}.$$

8. Sia dato il sistema discreto $G(z) = \frac{z}{z-\alpha}$ (con $0 < \alpha < 1$) dove con T si indica il periodo di campionamento. Utilizzando la corrispondenza tra il piano s e il piano z , indicare come il tempo di assestamento T_a del sistema $G(z)$ è funzione dei parametri α e T :

$$T_a = \frac{3T}{|\ln \alpha|}.$$

9. 1) Disegnare qualitativamente il luogo delle radici associato al seguente sistema:

$$G(s) = \frac{K(s+2)}{(s+2)^2 + 2^2}$$

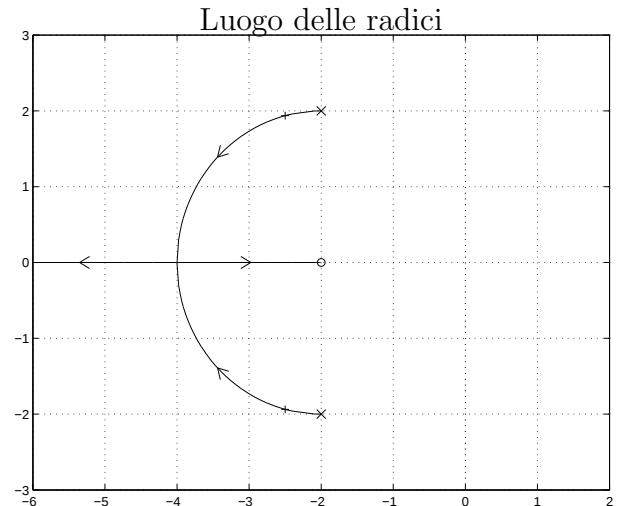
al variare del parametro $K > 0$.

- 2) Determinare esattamente la posizione del punto di diramazione σ_0 sull'asse reale:

$$\sigma_0 = -4.$$

- 3) Determinare il valore $\bar{K}$ corrispondente alla condizione di minimo tempo di assestamento per il sistema retroazionato:

$$\bar{K} = - \left. \frac{1}{G(s)} \right|_{s=\sigma_0} = 4$$



10. Sia $Y(X) \sin(\omega t + \varphi(X))$ la fondamentale del segnale periodico $y(t)$ presente all'uscita della nonlinearity algebrica $y(t) = f[x(t)]$ in risposta all'ingresso $x(t) = X \sin(\omega t)$. La funzione descrittiva $F(X)$ è definita nel modo seguente:

$$F(X) = \frac{Y(X)}{X} e^{j\varphi(X)}.$$

11. Il metodo di Ziegler-Nichols per determinare i valori di primo tentativo dei parametri di un regolatore standard PID

- ☐ richiede la conoscenza esatta del modello del sistema da controllare
- ☐ richiede la conoscenza della risposta impulsiva del sistema da controllare
- ☒ richiede la conoscenza della risposta al gradino del sistema da controllare
- ☒ è applicabile in modo approssimato anche al controllo di sistemi non lineari

12. Scrivere la funzione di trasferimento $H_0(s)$ del ricostruttore di ordine 0:

$$H_0(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}.$$

13. Calcolare la soluzione $y(n)$ della seguente equazione alle differenze a partire dalla condizione iniziale $y(0) = y_0$:

$$y(n+1) + 0.4y(n) = 0 \quad \rightarrow \quad y(n) = y_0 (-0.4)^n.$$

14. Calcolare la $\mathcal{Z}$ -trasformata $X(z)$ delle seguenti due successioni numeriche $x(k)$:

$$x(k) = 3k \quad \rightarrow \quad X(z) = \frac{3z}{(z-1)^2}, \quad x(k) = e^{2kT} \quad \rightarrow \quad X(z) = \frac{z}{z - e^{2T}}.$$