Nr.

Controlli Automatici B

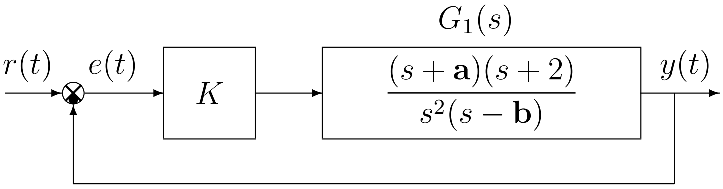
8 Febbraio 2010 - Esercizi

Compito Nr. $\boxed{\mathbf{a} = 3}$ $\boxed{\mathbf{b} = 5}$

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Negli esercizi che seguono, si sostituisca ad **a** e **b** i valori assegnati e si risponda alle domande.

a1) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro K. Tracciare il luogo delle radici sia per $K > 0$ che per $K < 0$. Determinare esattamente la posizione degli asintoti, le intersezioni ω^* con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno K^*. Determinare la posizione dei punti di diramazione "solo in modo qualitativo".

Soluzione. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K_1 G_1(s) = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad 1 + K \frac{(s+\mathbf{a})(s+\alpha)}{s^2(s-\mathbf{b})} = 0$$

dove $K_1 = K$. Gli andamenti qualitativi dei luoghi delle radici del sistema $G_1(s)$ al variare di $K_1 > 0$ e di $K_1 < 0$, quando $\mathbf{a} = 3$ e $\mathbf{b} = 5$, sono mostrati in Fig. 1. È presente un solo asintoto

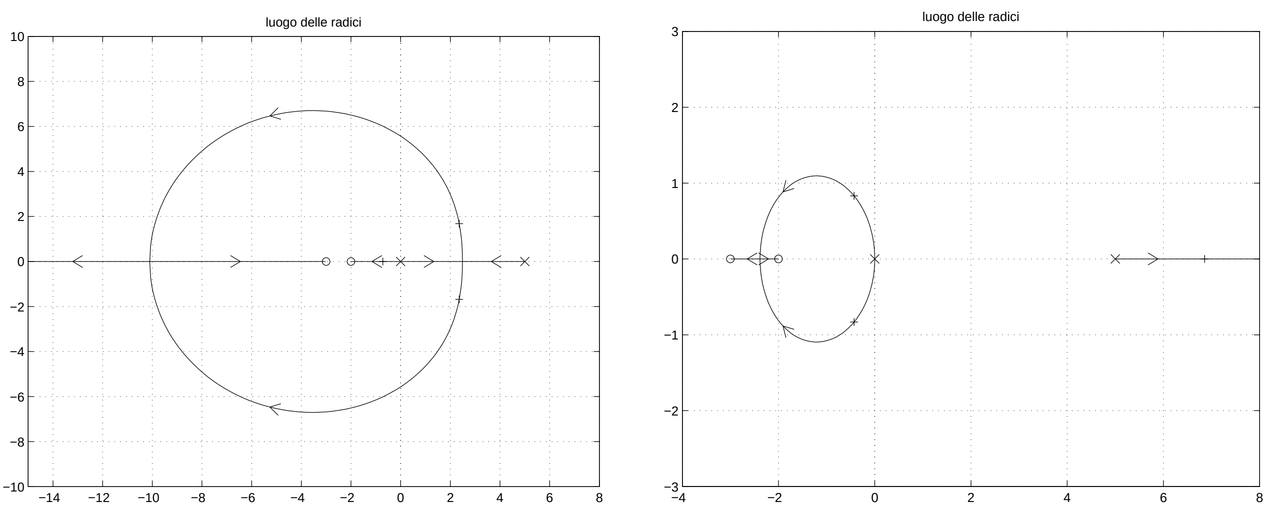


Figura 1: Luoghi delle radici del sistema $G_1(s)$ al variare di $K_1 > 0$ e di $K_1 < 0$ quando $\mathbf{a} = 3$ e $\mathbf{b} = 5$.

che coincide con con il semiasse reale negativo per $K > 0$ e con il semiasse reale positivo per $K < 0$. L'intersezione con l'asse immaginario si calcola applicando il criterio di Routh alla seguente equazione caratteristica:

$$1 + \frac{K(s+\mathbf{a})(s+\alpha)}{s^2(s-\mathbf{b})} = 0 \quad \rightarrow \quad s^3 + (K-\mathbf{b})s^2 + K(\mathbf{a}+\alpha)s + K\,\mathbf{a}\,\alpha = 0$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|cccc}
3 & 1 & K(\mathbf{a}+\alpha) & \rightarrow & 1 > 0 \\
2 & K-\mathbf{b} & K\,\mathbf{a}\,\alpha & \rightarrow & K > \mathbf{b} \\
1 & K(K-\mathbf{b})(\mathbf{a}+\alpha) - K\,\mathbf{a}\,\alpha & & \rightarrow & (K-\mathbf{b})(\mathbf{a}+\alpha) > \mathbf{a}\,\alpha \\
0 & K\,\mathbf{a}\,\alpha & & \rightarrow & K > 0
\end{array}$$

Il sistema retroazionato è stabile asintoticamente per:

$$K > \mathbf{b} + \frac{\mathbf{a}\,\alpha}{\mathbf{a}+\alpha} = K^* \qquad \rightarrow \qquad \omega^* = \sqrt{K^*(\mathbf{a}+\alpha)}$$

Nel caso $\mathbf{a} = 3$, $\mathbf{b} = 5$ e $\alpha = 2$ si ha:

$$K > K^* = 6.2, \qquad \omega^* = 5.5678$$

a.2) Si consideri la seguente equazione caratteristica:

$$s^3 + K_v s^2 + (\mathbf{a}+\mathbf{b})s + \mathbf{b}K_v = 0$$

Mostrare graficamente come si muovono sul piano complesso le radici dell'equazione caratteristica al variare del parametro $K_v > 0$. Determinare la posizione dei punti di diramazione "solo in modo qualitativo". Calcolare esattamente le intersezioni con l'asse immaginario.

Soluzione. Applicando il criterio di Routh all'equazione caratteristica si ottiene:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & \mathbf{a}+\mathbf{b} \\ 2 & K_v & K_v\,\mathbf{b} \\ 1 & \mathbf{a} & \\ 0 & K_v\,\mathbf{b} & \end{array}$$

Per $K_v > 0$ le radici dell'equazione caratteristica sono sempre tutte a parte reale negativa. L'equazione caratteristica puó essere riscritta separando i termini che moltiplicano il parametro K_v da quelli che non lo moltiplicano:

$$s^3 + (\mathbf{a}+\mathbf{b})s + K_v(s^2+\mathbf{b}) = 0$$

Dividendo l'equazione caratteristica per il polinomio che non moltiplica il parametro K_v si ottiene la seguente forma $1 + K_v\,G_2(s) = 0$:

$$1 + \frac{K_v(s^2+\mathbf{b})}{s^3+(\mathbf{a}+\mathbf{b})s} = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad 1 + K_v\frac{(s^2+\mathbf{b})}{s(s^2+\mathbf{a}+\mathbf{b})} = 0$$

I poli e gli zeri della funzione $G_2(s)$ sono i seguenti:

$$p_{1,2} = \pm j\sqrt{\mathbf{a}+\mathbf{b}}, \quad p_3 = 0, \qquad z_{1,2} = \pm j\sqrt{\mathbf{b}}.$$

Il contorno delle radici al variare del parametro $K_v > 0$ quando $\mathbf{a} = 3$ e $\mathbf{a} = 5$ è mostrato in Fig. 2.

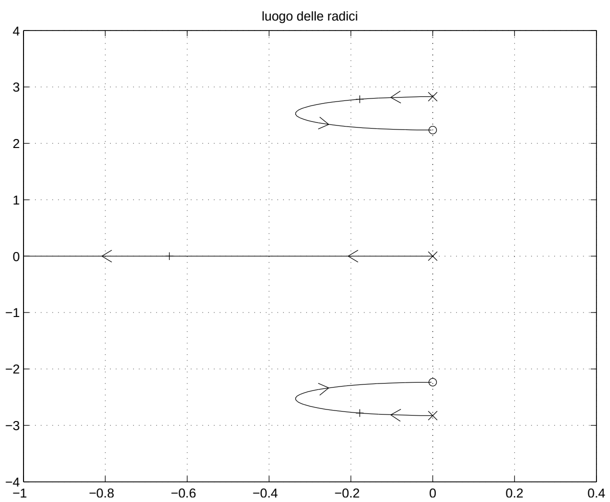
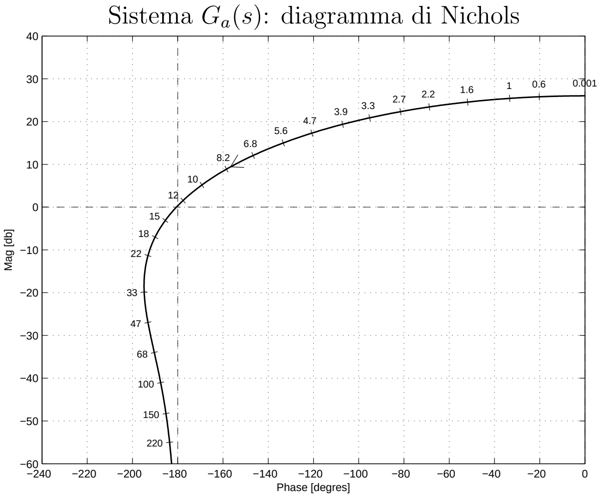


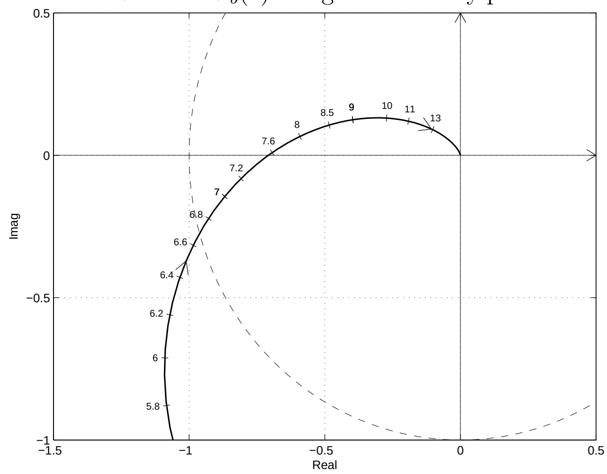
Figura 2: Contorno delle radici del sistema $G_2(s)$ al variare del parametro $K_v > 0$ quando $\mathbf{a} = 3$ e $\mathbf{a} = 5$.

b) Siano date le seguenti due funzioni di risposta armonica dei sistemi $G_a(s)$ e $G_b(s)$:

Sistema $G_a(s)$: diagramma di Nichols



Sistema $G_b(s)$: diagramma di Nyquist



b.1) Per il sistema $G_a(s)$, progettare una rete ritardatrice $C_1(s)$ in modo da garantire al sistema compensato un margine di fase $M_\varphi = (50 + 2\,\mathbf{a})^o$.

Sol. Modulo e fase del punto $B = ((-130 + 2\,\mathbf{a})^o,\ 0 \text{ db}) \overset{\mathbf{a}=3}{=} (-124^o,\ 0 \text{ db}) = (236^o,\ 0 \text{ db})$:

$$M_B = 1, \qquad \varphi_B = 236^o$$

Il punto A caratterizzato dalla pulsazione $\omega = 3.9$ può essere portato in B usando una rete ritardatrice.

$$M_A = 9.294 = 19.36 \text{ dB}, \qquad \varphi_A = -107.1^o = 252.9^o$$

I parametri da utilizzare nelle formule di inversione sono:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 0.1076, \qquad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -16.9^o$$

La rete anticipatrice che si ottiene utilizzando le formule di inversione è la seguente:

$$\tau_1 = \frac{M - \cos\varphi}{\omega\,\sin\varphi} = 0.7490, \quad \tau_2 = \frac{\cos\varphi - \frac{1}{M}}{\omega\,\sin\varphi} = 7.3534 \quad \rightarrow \quad C_1(s) = \frac{1 + 0.7490\,s}{1 + 7.3534\,s}$$

I diagrammi di Nichols delle funzioni $G_a(s)$ e $C_1(s)\,G_a(s)$ per $\mathbf{a} = 3$ sono mostrati in Fig. 3.

b.2) Sempre per il sistema $G_a(s)$ progettare una rete ritardatrice $C_2(s) = K_2\,\frac{1+\tau_1 s}{1+\tau_2 s}$ in modo da garantire al sistema compensato un margine di ampiezza $M_a = 3 + \mathbf{b}$ e un errore a regime per ingresso a gradino unitario $e_p \simeq 0.01$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno.

Soluzione. Per avere un errore a regime per ingresso a gradino pari a $e_p \simeq 0.01$ occorre che il guadagno statico $C_2(0)G_a(0)$ del sistema compensato $C_2(s)G_a(s)$ sia sufficientemente elevato:

$$e_p = \frac{1}{1 + K_p} = \frac{1}{1 + G_a(0)C_2(0)} = \frac{1}{1 + 20\,K} \simeq 0.01 \qquad \rightarrow \qquad K \simeq 5.$$

Il punto B corrispondente alla specifica $M_a = 3 + \mathbf{b}$ è il seguente ($\mathbf{b} = 5$):

$$M_B = \frac{1}{3 + \mathbf{b}} = 0.125, \qquad \varphi_B = 180^o.$$

Un punto A' da portare in B deve essere scelto appartenente alla funzione $G'_a(s) = 5\,G_a(s)$. Sul diagramma di Nyquist la funzione $G'_a(s)$ si ottiene amplificando di un fattore $K = 5$ la funzione $G_a(s)$. Per esempio, un punto A' che può essere portato in B usando una rete ritardatrice è quello corrispondente alla pulsazione $\omega = 8.2$:

$$M_{A'} = 2.783, \qquad \rightarrow \qquad M_A = 5\,M_{A'} = 13.91, \qquad \varphi_A = 201.6^o$$

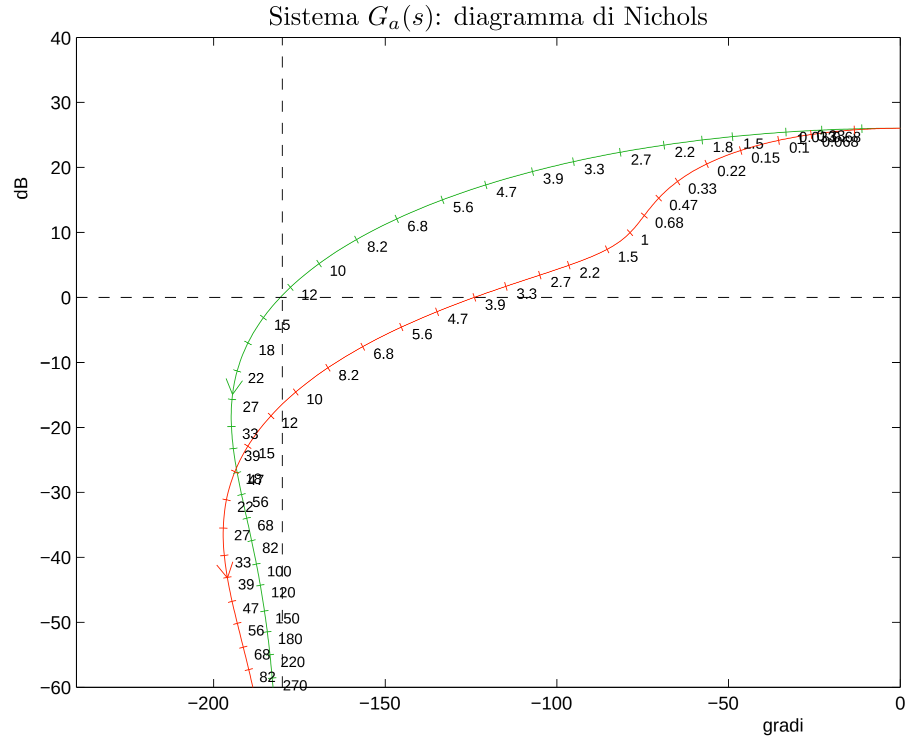


Figura 3: Diagrammi di Nichols delle funzioni $G_a(s)$ e $C_1(s)\,G_a(s)$ per $\mathbf{a} = 3$.

I parametri da utilizzare nelle formule di inversione sono:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 0.009, \qquad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -21.6^o.$$

La rete ritardatrice che si ottiene utilizzando le formule di inversione è la seguente:

$$\tau_1 = \frac{M - \cos\varphi}{\omega\,\sin\varphi} = 0.3052, \quad \tau_2 = \frac{\cos\varphi - \frac{1}{M}}{\omega\,\sin\varphi} = 36.59 \quad \rightarrow \quad C_2(s) = \frac{1 + 0.3052\,s}{1 + 36.59\,s}$$

I diagrammi di Nichols delle funzioni $K\,G_a(s)$ e $K\,C_2(s)\,G_a(s)$ sono mostrati in Fig. 4.

b.3) Per il sistema $G_b(s)$ progettare una rete anticipatrice in modo da garantire al sistema compensato un margine di margine di fase $M_\varphi = (40{+}\mathbf{a})^o$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno;

Soluzione. Il modulo e la fase del punto B corrispondente alla specifica $M_\varphi = (40 + \mathbf{a})^o$ sono i seguenti:

$$M_B = 1, \qquad \varphi_B = (220 + \mathbf{a})^o|_{\mathbf{a}=3} = 223.$$

Un punto A compatibile con la specifica di progetto richiesta è quello corrispondente alla pulsazione $\omega = 7.6$:

$$M_A = 0.6938, \qquad \varphi_A = 179.2^o \qquad \rightarrow \qquad M = \frac{M_B}{M_A} = 1.4413, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = 43.8^o$$

La rete correttrice che si ottiene utilizzando le formule di inversione è la seguente:

$$\tau_1 = \frac{M - \cos\varphi}{\omega\,\sin\varphi} = 0.1368, \quad \tau_2 = \frac{\cos\varphi - \frac{1}{M}}{\omega\,\sin\varphi} = 0.0053 \quad \rightarrow \quad C_3(s) = \frac{1 + 0.1368\,s}{1 + 0.0053\,s}$$

I diagrammi di Nyquist delle funzioni $G_b(s)$ e $C_3(s)\,G_b(s)$ per $\mathbf{a} = 3$ sono mostrati in Fig. 5.

c) Si consideri il seguente sistema non lineare retroazionato:

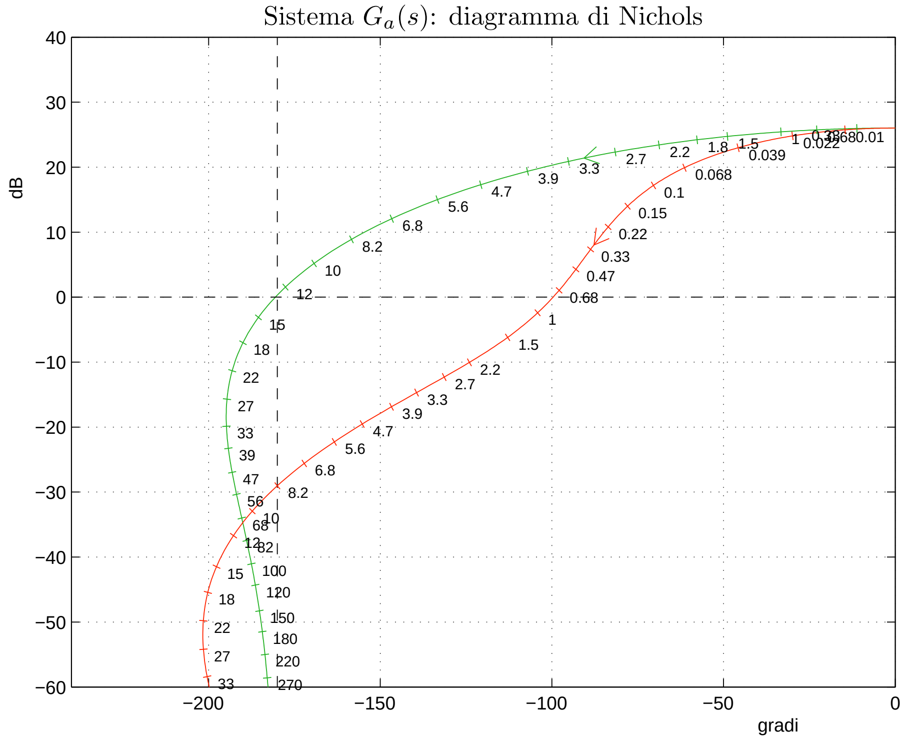


Figura 4: Diagrammi di Nichols delle funzioni $K\,G_a(s)$ e $K\,C_1(s)\,G_a(s)$.

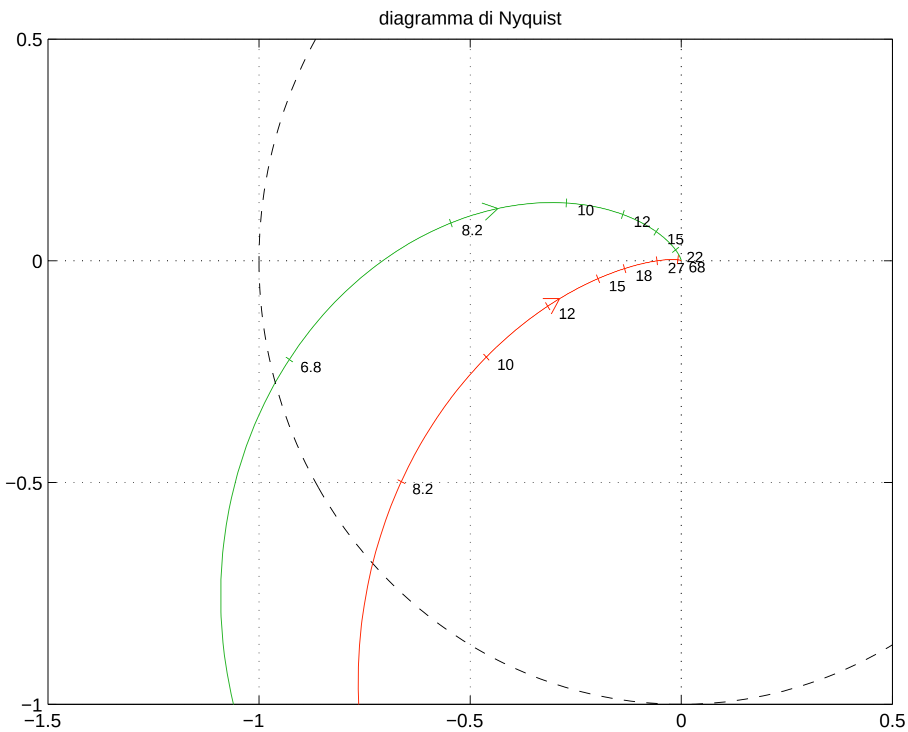
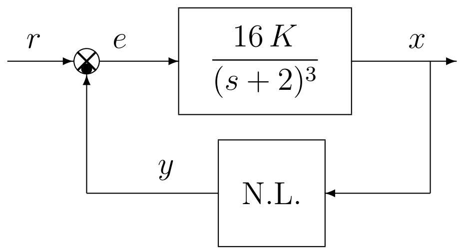
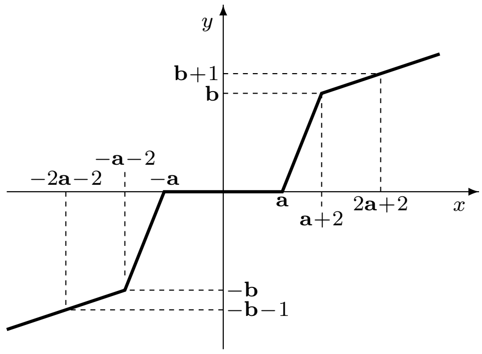


Figura 5: di Nyquist delle funzioni $G_b(s)$ e $C_3(s)\,G_b(s)$ per $\mathbf{a} = 3$.





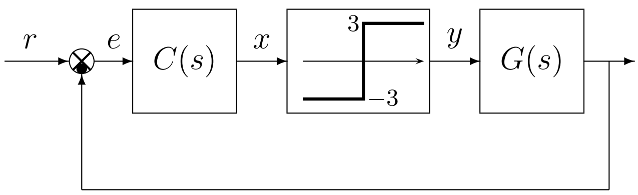
c.1) Posto $K = 1$, determinare per quali valori r_1 ed r_2 dell'ingresso r i punti di lavoro del sistema retroazionato sono posizionati in $(x_0,\, y_0) = (0,\, 0)$ e in $(x_1,\, y_1) = (-\mathbf{a}{-}2,\, -\mathbf{b})$.

c.2) Posto $K = 1$ ed utilizzando il criterio del cerchio, dire se il sistema retroazionato è stabile o meno nell'intorno del punto $(x_1,\, y_1) = (-\mathbf{a}{-}2,\, -\mathbf{b})$.

c.3) Disegnare in modo qualitativo l'andamento della funzione descrittiva $F(X)$ della non linearità $y(x)$ nell'intorno del punto $(0,\, 0)$. Utilizzare delle variabili (per esempio: m_1, m_2, ...) per rappresentare gli eventuali valori non noti minimi e massimi della funzione $F(X)$.

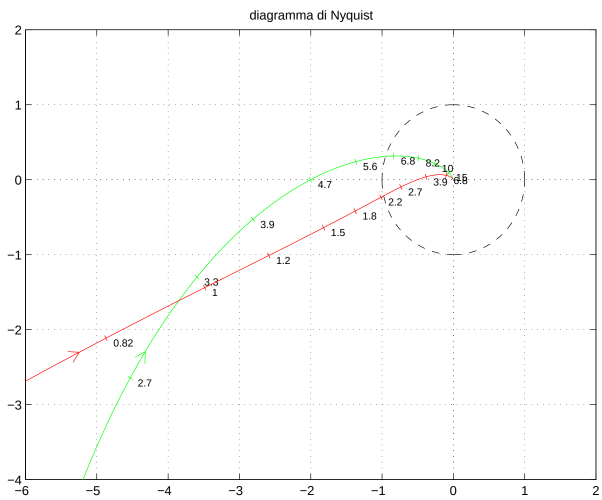
c.4) Discutere "qualitativamente" (in funzione anche dei parametri m_1 ed m_2) l'esistenza o meno di cicli limite nel sistema retroazionato al variare del guadagno $K > 0$. Calcolare la pulsazione ω^* degli eventuali cicli limite presenti nel sistema retroazionato.

d) Sia dato il sistema retroazionato riportato a fianco, e il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ riportato sotto.



d.1) Posto $C(s) = 1$, determinare l'ampiezza X^* e la pulsazione ω^* dell'oscillazione autosostenuta che è presente all'interno del sistema quando $r = 0$.

d.2) Progettare una rete correttrice $C(s)$, in modo che l'oscillazione autosostenuta che è presente all'interno del sistema quando $r = 0$ sia caratterizzata da un'ampiezza $X^* = 2$ e da una pulsazione $\omega^* = 3.3$.



Sol.

d.1) La funzione descrittiva del relè ideale è:

$$F(X) = \frac{12}{\pi\, X}$$

L'intersezione della funzione di risposta armonica $G(j\omega)$ con il semiasse reale negativo avviene nel punto -2 in corrispondenza della pulsazione $\omega = 4.7$. Il margine di ampiezza del sistema è quindi $K^* = 0.5$. L'ampiezza X^* dell'oscillazione autosostenuta si ricava imponendo $F(X^*) = K^*$:

$$\frac{12}{\pi\, X^*} = 0.5 \qquad \rightarrow \qquad X^* = \frac{24}{\pi} = 7.6394$$

d.2) Per poter avere un'oscillazione autosostenuta con ampiezza $X^* = 2$, il margine di ampiezza K^* del sistema compensato dovrà essere uguale a $F(X^*)$:

$$K^* = \frac{12}{\pi\, X^*} = \frac{6}{\pi} = 1.91 \qquad \rightarrow \qquad B = -\frac{1}{K^*} = -0.5236$$

Modulo e fase del punto B:

$$M_B = 0.5236, \qquad \varphi_B = 180^o$$

Il punto A è quello corrispondente alla pulsazione $\omega = 3.3$:

$$M_A = 3.822, \quad \varphi_A = 199.9^o \qquad \longrightarrow \qquad M = \frac{M_B}{M_A} = 0.137, \quad \varphi = -19.85^o$$

La rete correttrice che si ottiene utilizzando le formule di inversione è la seguente:

$$\tau_1 = \frac{M - \cos\varphi}{\omega \sin\varphi} = 0.7171, \qquad \tau_2 = \frac{\cos\varphi - \frac{1}{M}}{\omega \sin\varphi} = 5.675 \qquad \to \qquad C(s) = \frac{1 + 0.7171\, s}{1 + 5.675\, s}$$

e) Utilizzando il metodo della corrispondenza poli-zeri, discretizzare la seguente rete correttrice

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{(1 + \mathbf{a}\, s)}{\mathbf{b}\, s}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento $T = 0.1$ e si imponga l'uguaglianza dei guadagni alle alte pulsazioni.

Soluzione. Utilizzando il metodo della corrispondenza poli-zeri si ottiene:

$$D(z) = K\, \frac{(1 - e^{-\frac{T}{\mathbf{a}}} z^{-1})}{(1 - z^{-1})}$$

Il valore di K si determina imponendo l'uguaglianza alle alte frequenze:

$$\lim_{s\to\infty} D(s) = \lim_{z\to -1} D(z) \qquad \to \qquad \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = K\, \frac{(1 + e^{-\frac{T}{\mathbf{a}}})}{2} \qquad \to \qquad K = \frac{2\,\mathbf{a}}{\mathbf{b}(1 + e^{-\frac{T}{\mathbf{a}}})}$$

Per $T = 0.1$ e $\mathbf{a} = 3$ si ha:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{0.61 - 0.59\, z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

La corrispondente equazione alle differenze assume la forma seguente:

$$m(k) = m(k-1) + 0.61\, e(k) - 0.59\, e(k-1)]$$

f) Calcolare la risposta al gradino unitario $x(n) = (1, 1, 1, \ldots)$ del seguente sistema dinamico discreto, partendo da condizioni iniziali nulle:

$$y(n+1) - 0.5\, y(n) = \mathbf{a}\, x(n)$$

Soluzione. Applicando la Z-trasformata alla precedente equazione alle differenze si ottiene:

$$Y(z) = \frac{\mathbf{a}}{z - 0.5} X(z) = \frac{\mathbf{a}\, z}{(z-0.5)(z-1)} = 2\,\mathbf{a} \left[\frac{z}{(z-1)} - \frac{z}{(z-0.5)}\right]$$

Antitrasformando si ottiene:

$$y(n) = 2\,\mathbf{a}\, [1 - 0.5^n]\, .$$

Nr.	

Controlli Automatici B

8 Febbraio 2010 - Domande Teoriche

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Rispondere alle domande e ai test che seguono. Per ciascuno dei test segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono giuste. La risposta al test è considerata corretta solo se tutte le affermazioni corrette sono state contrassegnate.

1. Calcolare la $\mathcal{Z}$-trasformata $X(z)$ dei seguenti segnali tempo continui $x(t)$ quando $t = k\,T$:

$$x(t) = 2\,e^{-3\,t} \quad \to \quad X(z) = \frac{2\,z}{(z - e^{-3\,T})} \qquad\qquad x(t) = 3\,t \quad \to \quad X(z) = \frac{3\,T\,z}{(z-1)^2}$$

2. Indicare quale dei seguenti sistemi discreti $G(z)$ ha la risposta impulsiva $g(k)$ che tende a zero più "velocemente":

   ○ $G(z) = \frac{z+1}{z(z-0.6)}$
   ○ $G(z) = \frac{z+1}{z(z+0.8)}$
   ⊗ $G(z) = \frac{z+1}{z^2(z-0.2)}$
   ○ $G(z) = \frac{z+1}{z^2(z+0.4)}$

3. Sia $X(z) = \mathcal{Z}[x(k)]$ la $\mathcal{Z}$-trasformata della successione $x(k)$. Per $n = 1, 2, \ldots$, enunciare il teorema della traslazione nel tempo nei 2 casi a) ritardo, e b) anticipo:

$$a) \qquad \mathcal{Z}[x(t-nT)] \quad = \quad z^{-n}X(z)$$

$$b) \qquad \mathcal{Z}[x(t+nT)] \quad = \quad z^{n}\left[X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT)z^{-k}\right]$$

4. A fianco è riportato il luogo delle radici del sistema $G(s) = \frac{(s+4)}{(s-1)[(s+2)^2+2^2]}$ al variare del parametro $K > 0$. Calcolare:

4.1) L'ascissa σ_0 corrispondente alla condizione di allineamento dei tre poli:

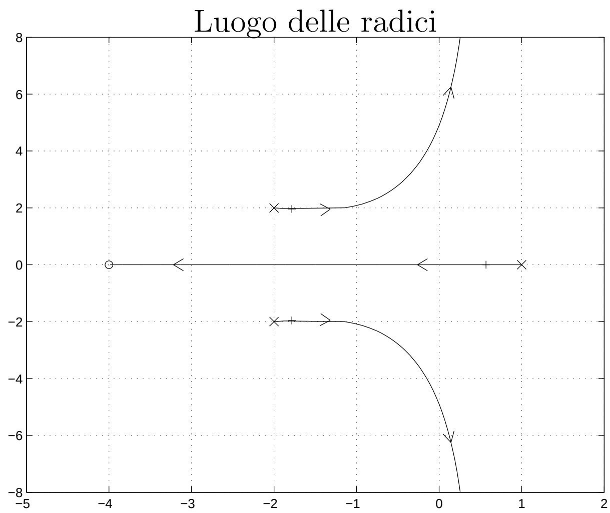
$$\sigma_0 = -1$$

4.2) Il valore K^* corrispondente alla condizione di allineamento dei tre poli:

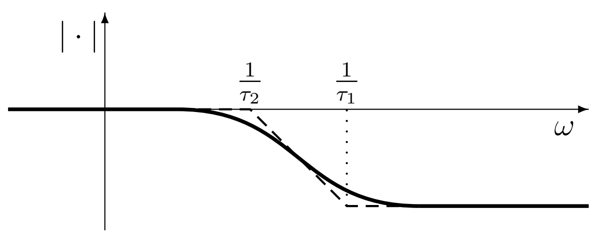
$$K^* = \frac{10}{3} = 3.33$$

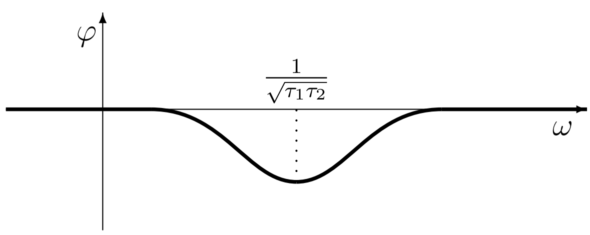
4.3) Il centro degli asintoti σ_a del luogo delle radici:

$$\sigma_a = 0.5$$



5. Tracciare i diagrammi di bode (moduli e fasi) di una rete ritardatrice $C(s) = \frac{(1+\tau_1\,s)}{(1+\tau_2\,s)}$, $(\tau_1 < \tau_2)$:





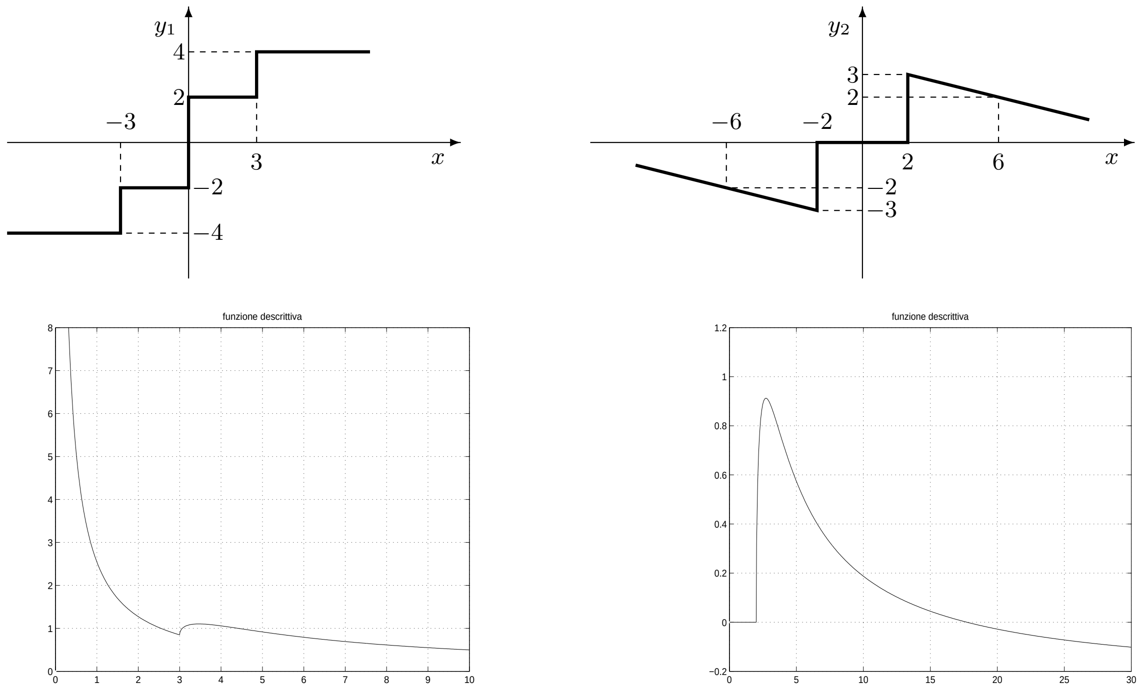
6. Sia $G(z)$ la $\mathcal{Z}$-trasformata della successione numerica $g(k)$. Scrivere gli enunciati dei teoremi del valore iniziale e del valore finale:

$$g(0) = g(k)|_{k=0} = \lim_{z\to\infty} G(z), \qquad\qquad \lim_{k\to\infty} g(k) = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})G(z)$$

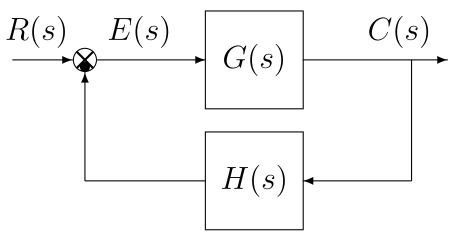
7. Per poter applicare il metodo base della funzione descrittiva ad un sistema $G(s)$ retroazionato su una non linearità $y = f(x)$

◯ il sistema $G(s)$ deve essere a fase minima
◯ la non linearità $y = f(x)$ deve essere di tipo "a settore"
⊗ la non linearità $y = f(x)$ deve essere simmetrica rispetto all'origine

8. Date le seguenti caratteristiche non lineari simmetriche rispetto all'origine, determinare "qualitativamente" gli andamenti delle corrispondenti funzioni descrittive $F_1(X)$ ed $F_2(X)$:



9. Si consideri il sistema retroazionato riportato di fianco. Scrivere il legame che lega la variazione relativa del sistema $G(s)$ alla variazione relativa del sistema retroazionato $G_0(s)$ quando varia un parametro α interno alla funzione di trasferimento $G(s)$:

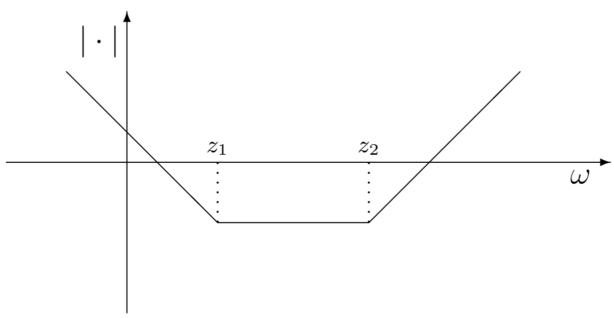


$$\frac{\Delta G_0(s)}{G_0(s)} = \frac{1}{1 + G(s)\,H(s)} \, \frac{\Delta G(s)}{G(s)}$$

10. Scrivere l'equazione alle differenze corrispondente alla seguente funzione di trasferimento:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + 3\,z^{-1}}{z + 2 + 4\,z^{-1}} \qquad \rightarrow \qquad y(n+1) + 2\,y(n) + 4\,y(n-1) = x(n) + 3\,x(n-1)$$

11. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ di un regolatore standard PID e a fianco disegnare qualitativamente il corrispondente diagramma di Bode dei moduli nell'ipotesi di zeri reali distinti:



$$G(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_d s} + T_s s\right)$$