Equazioni differenziali lineari

- Da un punto di vista dinamico, i sistemi lineari stazionari sono descritti da equazioni differenziali ordinarie lineari a coefficienti costanti:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0\, y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \ldots + b_0\, x$$

  o, con notazione più compatta (operatore derivata $D \equiv \frac{d}{dt}$)

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\, D^i\, y(t) = \sum_{i=0}^{m} b_i\, D^i\, x(t)$$

  dove $y(t)$ è la funzione *uscita* ed $x(t)$ è la funzione *ingresso*.

- *Condizione di fisica realizzabilità*: $n \geq m$.

$$\begin{cases} \text{se } \; n > m \; \text{ il sistema è } \textit{strettamente proprio} \\ \text{se } \; n = m \; \text{ il sistema è } \textit{proprio} \\ \text{se } \; n < m \; \text{ il sistema è } \textit{improprio} \end{cases}$$

- Per risolvere l'equazione differenziale occorre conoscere

  – *i)* le *condizioni iniziali*:

$$y(0^-)\ , \quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0^-}\ , \quad \ldots\ , \quad \left.\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right|_{t=0^-}$$

  – *ii)* il *segnale di ingresso*

$$x(t)\ , \qquad 0 \leq t \leq T$$

- Si suppone che la funzione $x(t)$ sia *continua a tratti* e *limitata per ogni t finito*;

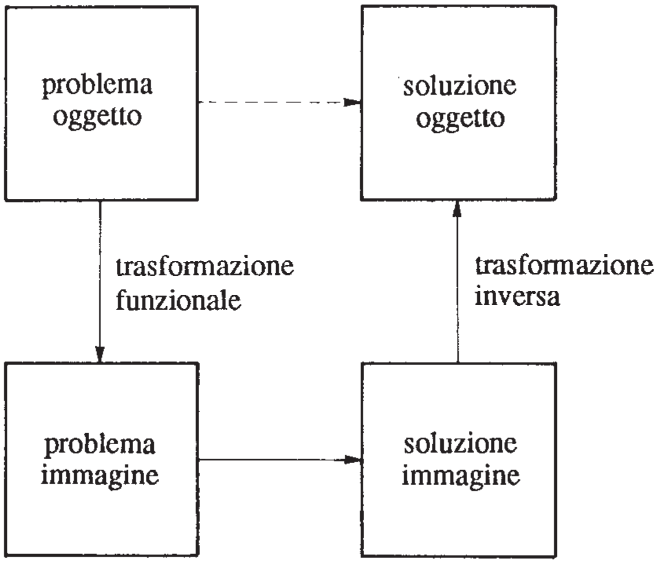
- La soluzione dell'equazione differenziale è la somma di due funzioni:

$$y(t) = y_0(t) + y_1(t)$$

  1. *l'evoluzione libera* $y_0(t)$, cioè la soluzione dell'equazione differenziale omogenea associata che si ottiene ponendo uguale a zero il segnale di ingresso: $x(t) \equiv 0$, $0 \leq t \leq T$.
  2. *l'evoluzione forzata* $y_1(t)$, cioè la soluzione particolare che si ottiene ponendo a zero tutte le condizioni iniziali.

- Per la soluzione delle equazioni differenziali sono di notevole utilità le *trasformazioni funzionali*, in particolare la *trasformazione di Laplace*.

- Le trasformazioni funzionali stabiliscono una corrispondenza *biunivoca* fra *funzioni oggetto*, normalmente funzioni del tempo, e *funzioni immagine*.



- Tipicamente il *problema immagine* è di più facile soluzione. Esempio:

$$a \cdot b = e^{\ln(a \cdot b)} = e^{(\ln a + \ln b)}$$

- Le equazioni differenziali si trasformano in equazioni algebriche, per cui la loro soluzione è immediata.

- Dalla soluzione immagine si passa poi alla soluzione oggetto eseguendo sulle funzioni immagine l'operazione di *antitrasformazione*.

Trasformate di Laplace

- La *trasformata di Laplace* associa *in modo biunivoco* a una generica funzione reale del tempo $f(t)$ una funzione complessa $F(s)$ della variabile complessa s:

$$F(s) = \mathcal{L}\big[f(t)\big]$$

È definita nel modo seguente:

$$\boxed{F(s) := \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt}$$

- La trasformazione inversa viene detta *antitrasformata di Laplace*:

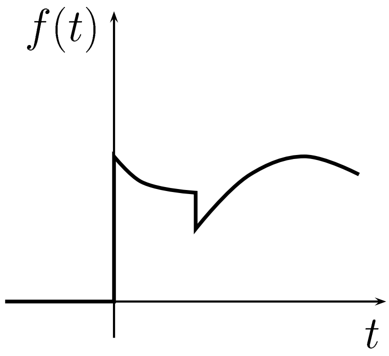
$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\big[F(s)\big]$$

È definita nel modo seguente:

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} F(s)\, e^{st}\, ds}$$

- La funzione $F(s)$ è definita in un *dominio di convergenza* che consiste in un semipiano del piano s posto a destra di una retta parallela all'asse immaginario

- La funzione $f(t)$ è trasformabile secondo Laplace se:
  - $f(t) = 0$ per $t < 0$;
  - $f(t)$ è continua a tratti e limitata al finito per $t \geq 0$;
  - l'integrale $\displaystyle\int_0^\infty |f(t)| e^{-\sigma t}\, dt$ esiste per un qualche valore di σ.



- Si tiene conto della *storia passata* della variabile $f(t)$ per $t < 0$ considerando opportune *condizioni iniziali* all'istante $t = 0$.

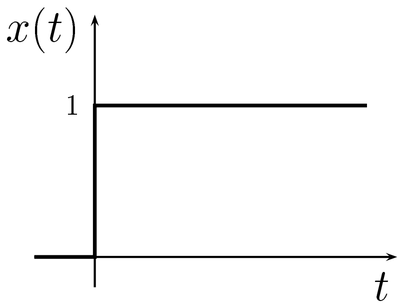
- **Trasformate di Laplace dei segnali di uso più comune**

$$\boxed{\mathcal{L}\left[t^n e^{a\,t}\right] = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}}$$

Come casi particolari di questa relazione si ottengono le trasformate di Laplace dei seguenti segnali:

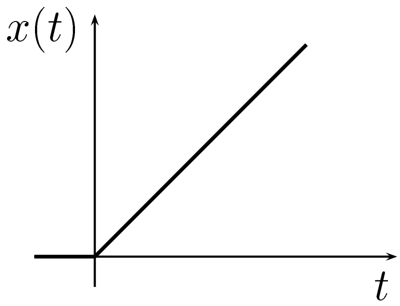
a) **Gradino unitario** ($n = 0$, $a = 0$):

$$x(t) = u(t) \quad \leftrightarrow \quad X(s) = \frac{1}{s}$$



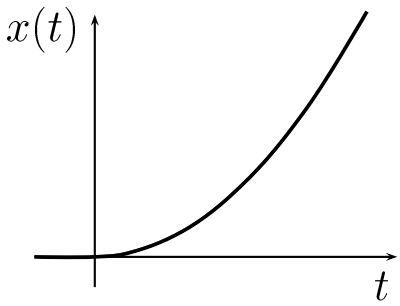
b) **Rampa unitaria** ($n = 1$, $a = 0$):

$$x(t) = t \quad \leftrightarrow \quad X(s) = \frac{1}{s^2}$$



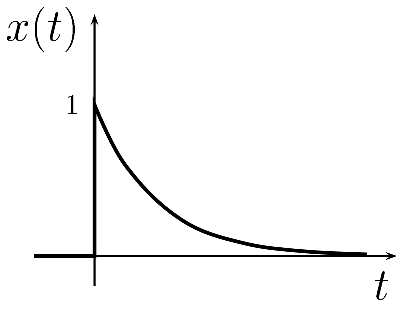
c) **Parabola unitaria** ($n = 2$, $a = 0$):

$$x(t) = \frac{t^2}{2} \quad \leftrightarrow \quad X(s) = \frac{1}{s^3}$$



d) **Esponenziale** ($n = 0$, $a < 0$):

$$x(t) = e^{a\,t} \quad \leftrightarrow \quad X(s) = \frac{1}{s-a}$$



e) **Sinusoide**: $x(t) = \sin \omega t$. Tale segnale si ricava dalla composizione di due esponenziali:

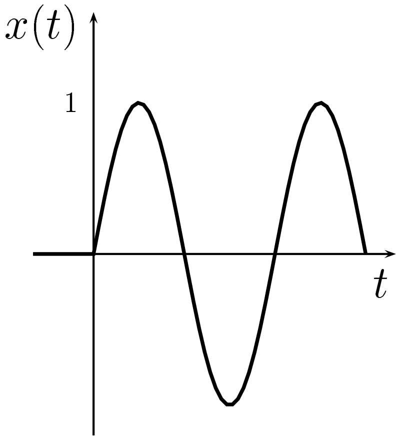
$$x(t) = \sin \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

Per la linearià della trasformata di Laplace si ha:

$$\mathcal{L}[x(t)] = \mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega}\right] = \frac{1}{2j}\left[\frac{2\omega j}{s^2 + \omega^2}\right]$$

da cui si ricava:

$$x(t) = \sin \omega t \quad \leftrightarrow \quad X(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

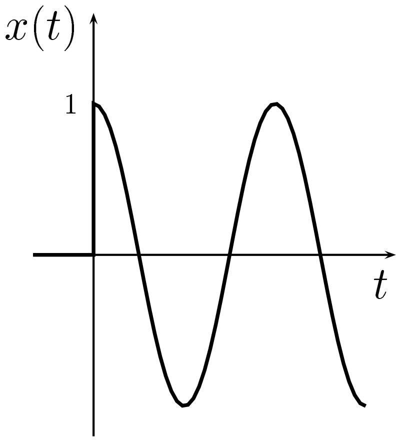


f) **Cosinusoide**: $x(t) = \cos \omega t$. Per tale funzione valgono le relazioni:

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \mathcal{L}[\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{s + j\omega}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{2s}{s^2 + \omega^2}\right]$$

da cui si ottiene:

$$x(t) = \cos \omega t \quad \leftrightarrow \quad X(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$



Proprietà della trasformata di Laplace

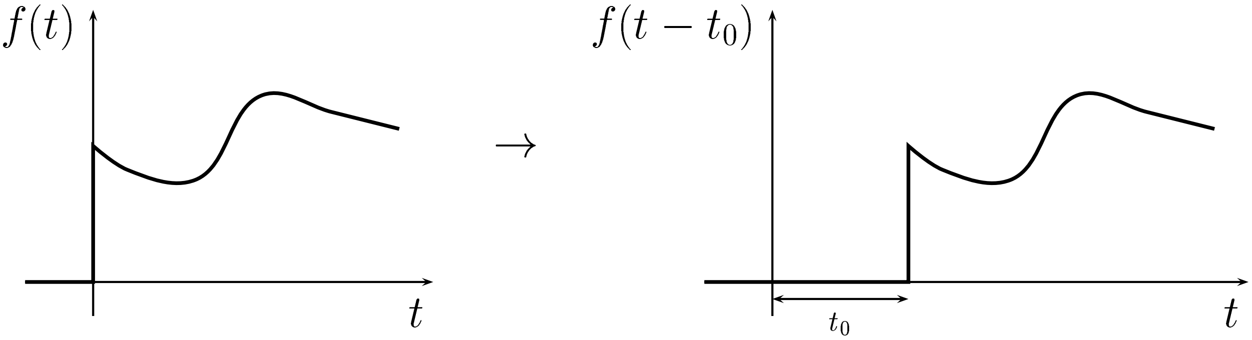
- **Linearità**. Dette c_1 e c_2 due costanti complesse arbitrarie, $f_1(t)$ ed $f_2(t)$ due funzioni del tempo le cui trasformate siano rispettivamente $F_1(s)$ e $F_2(s)$, vale la relazione

$$\boxed{\mathcal{L}\big[c_1\, f_1(t) + c_2\, f_2(t)\big] = c_1\, F_1(s) + c_2\, F_2(s)}$$

- **Traslazione nel tempo**. Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$, nulla per $t<0$. Vale la relazione

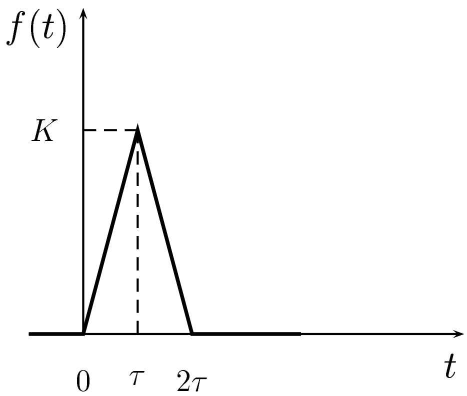
$$\boxed{\mathcal{L}\big[f(t-t_0)\big] = e^{-t_0\, s}\, F(s)}$$

cioè moltiplicare per la funzione $e^{-t_0 s}$ nello spazio trasformato vuol dire, nel tempo, traslare in ritardo la funzione $f(t)$ della quantità t_0.



Esempio: Il segnale $f(t)$ è scomponibile nella somma di tre rampe, di pendenze K/τ, $-2K/\tau$ e K/τ, applicate rispettivamente agli istanti $t=0$, $t=\tau$ e $t=2\,\tau$ utilizzando il teorema della traslazione nel tempo, si deduce

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{K}{\tau\, s^2}\,(1 - 2\,e^{-\tau s} + e^{-2\tau s}) \\ &= \frac{K}{\tau\, s^2}\,(1 - e^{-\tau s})^2 \end{aligned}$$



- **Trasformata dell'integrale**. Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$. Vale la relazione

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right] = \frac{1}{s}\, F(s)}$$

Moltiplicare per $\frac{1}{s}$ una funzione $F(s)$ vuol dire calcolare l'integrale del segnale $f(t)$.

- **Trasformata della derivata generalizzata**. Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$. Vale la relazione

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = s\, F(s) - f(0^-)}$$

dove $f(0^-)$ è il valore che la funzione $f(t)$ assume all'istante $t = 0^-$. Nel caso di condizioni iniziali nulle, moltiplicare per s una funzione $F(s)$ vuol dire calcolare la derivata del segnale $f(t)$.

- **Teorema del valore iniziale**. Sia $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$. Vale la relazione:

$$\lim_{t\to 0^+} x(t) = \lim_{s\to\infty} s\, X(s)$$

Questo teorema è valido per qualsiasi funzione $X(s)$.

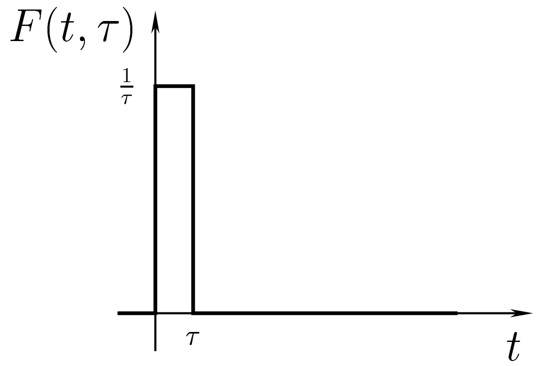
- **Teorema del valore finale**. Sia $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$. Vale la relazione:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} s\, X(s)$$

Questo teorema è valido solamente per funzioni $X(s)$ che abbiamo tutti i poli a parte reale negativa, eccezion fatta per un polo nell'origine.

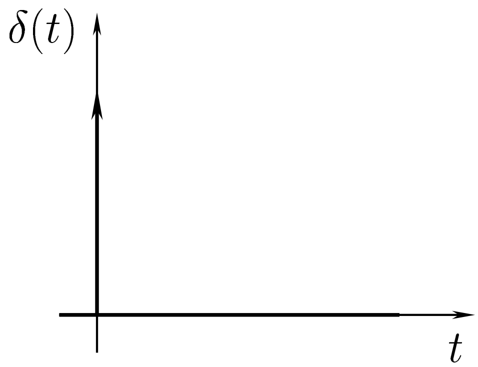
- **Impulso di Dirac**: $\delta(t)$. È un segnale ideale che approssima un impulso di area unitaria.

$$\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} F(t, \tau)$$



- L'impulso di Dirac viene rappresentato nel modo seguente:

Funzione $\delta(t)$



- La trasformata di Laplace dell'impulso di Dirac è:

$$F(s) = \mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

Valgono infatti le seguenti relazioni:

$$F(s) = \mathcal{L}[\lim_{\tau \to 0} F(t, \tau)] = \lim_{\tau \to 0} \mathcal{L}[F(t, \tau)] = \lim_{\tau \to 0} F(s, \tau)$$

Essendo

$$F(s, \tau) = \frac{1}{\tau s} - \frac{1}{\tau s} e^{-\tau s} = \frac{1}{\tau s} \left(1 - e^{-\tau s}\right)$$

si ha che

$$F(s) = \lim_{\tau \to 0} F(s, \tau) = \lim_{\tau \to 0} \frac{\frac{d}{d\tau}(1 - e^{-\tau s})}{\frac{d}{d\tau}(\tau s)} = \lim_{\tau \to 0} \frac{s e^{-\tau s}}{s} = 1$$

- La risposta di un sistema all'impulso di Dirac coincide con l'antitrasformata della funzione di trasferimento:

$$Y(s) = G(s) \underbrace{X(s)}_{1} = G(s) \qquad \rightarrow \qquad y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = g(t)$$

- **Teorema della traslazione in s**. Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$. Vale la relazione:

$$\boxed{\mathcal{L}\left[e^{-at}f(t)\right] = F(s+a)}$$

- **Derivate di ordine superiore al primo**. Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$ e siano $f(0^-)$, $\dot{f}(0^-)$, $\ddot{f}(0^-)$, ... le condizioni iniziali della funzione $f(t)$ all'istante 0^-. Valgono le relazioni (si utilizza l'operatore derivata D):

$$\boxed{\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[\frac{d\,f}{dt}\right] &= \mathcal{L}\big[D\,f(t)\big] = s\,F(s) - \,f(0^-)\\
\mathcal{L}\left[\frac{d^2 f}{dt^2}\right] &= \mathcal{L}\big[D^2\,f(t)\big] = s^2\,F(s) - s\,f(0^-) - D\,f(t)|_{t=0^-}\\
\cdots \quad & \quad \cdots\\
\mathcal{L}\left[\frac{d^i f}{dt^i}\right] &= \mathcal{L}\big[D^i\,f(t)\big] = s^i\,F(s) - \sum_{j=0}^{i-1} s^j\,D^{i-j-1}\,f(t)\Big|_{t=0^-}
\end{aligned}}$$

- **Teorema della trasformata del prodotto integrale.** Siano $F_1(s)$ e $F_2(s)$ le trasformate di Laplace delle funzioni $f_1(t)$ e $f_2(t)$. Vale la relazione

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\int_0^\infty f_1(\tau)\,f_2(t-\tau)\,d\tau\right] = F_1(s)\,F_2(s)}$$

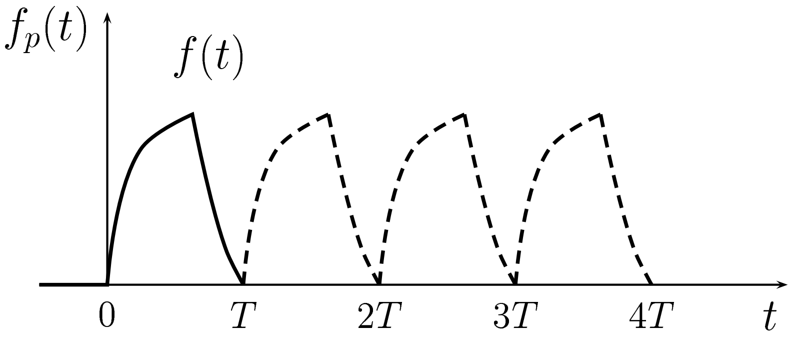
L'integrale di convoluzione delle funzioni $f_1(t)$ e $f_2(t)$ gode della proprietà commutativa:

$$\int_0^\infty f_1(\tau)\,f_2(t-\tau)\,d\tau = \int_0^\infty f_2(\tau)\,f_1(t-\tau)\,d\tau$$

- **Trasformata di una funzione periodica**. Sia $f(t)$ una funzione non nulla solo per $0 \leq t \leq T$ e sia $f_p(t)$ la funzione che si ottiene ripetendo in modo periodico la funzione $f(t)$.

$$f_p(t + nT) = f(t)$$

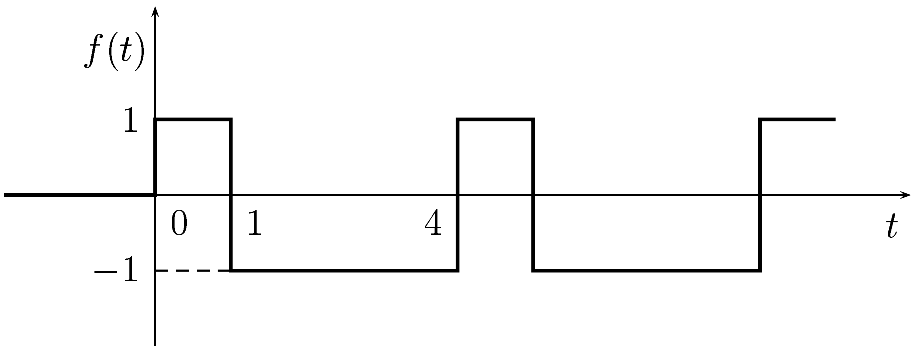
$$\forall n, \quad 0 \leq t \leq T$$



Vale la seguente relazione:

$$\boxed{\mathcal{L}\left[f_p(t)\right] = \frac{F(s)}{1 - e^{-Ts}}}$$

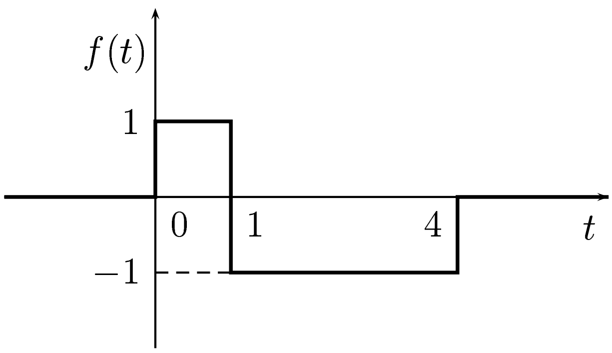
Esempio. Calcolare la trasformata di Laplace del seguente segnale:



La funzione $f(t)$ è periodica di periodo $T = 4$. La sua trasformata di Laplace è

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right] = \frac{1}{1 - e^{-4s}} \mathcal{L}\left[f_1(t)\right] = \frac{1 - 2e^{-s} + e^{-4s}}{s(1 - e^{-4s})}$$

Con $f_1(t)$ si è indicata la funzione seguente:



Funzione di trasferimento

- Si consideri l'equazione differenziale:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\, D^i\, y(t) = \sum_{i=0}^{m} b_i\, D^i\, x(t)$$

Sostituendo alle funzioni e alle loro derivate le rispettive trasformate, si ottiene la relazione

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\, s^i\, Y(s) = \sum_{i=0}^{m} b_i\, s^i\, X(s) + \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=0}^{i-1} s^j\, D^{i-j-1}\, y(t)\Big|_{t=0^-}$$

in cui con $X(s)$ e $Y(s)$ si indicano le trasformate di Laplace dei segnali di ingresso e uscita $x(t)$ e $y(t)$.

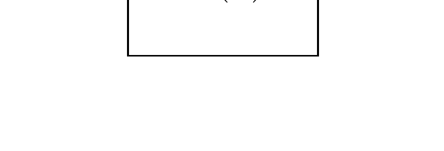
- La trasformata di Laplace $Y(s)$ è data quindi dalla somma di due funzioni:

$$\begin{aligned} Y_0(s) &= \left.\textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=0}^{i-1} s^j\, D^{i-j-1}\, y(t)\right|_{t=0^-} \Big/ \textstyle\sum_{i=0}^{n} a_i\, s^i \\ Y_1(s) &= \left(\textstyle\sum_{i=0}^{m} b_i\, s^i \Big/ \sum_{i=0}^{n} a_i\, s^i\right) X(s) \end{aligned}$$

che sono, rispettivamente, le trasformate dell'*evoluzione libera* $y_0(t)$ e dell'*evoluzione forzata* $y_1(t)$.

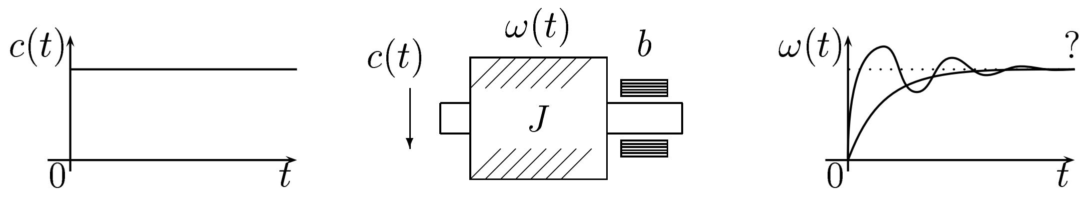
- La seguente <u>*funzione di trasferimento*</u> del sistema

$$\boxed{G(s) = \frac{Y_1(s)}{X(s)} = \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{m} b_i\, s^i}{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i\, s^i}}$$



è definita a partire da *condizioni iniziali identicamente nulle.*

Esempio. Si consideri un elemento meccanico con inerzia J, coefficiente di attrito lineare b che ruota alla velocità angolare ω al quale venga applicata una coppia esterna $c(t)$.



Si richiede di determinare la risposta del sistema al gradino unitario.
Per rispondere esattamente a questa domanda occorre determinare il modello dinamico del sistema. L'equazione differenziale che caratterizza il sistema è la seguente:

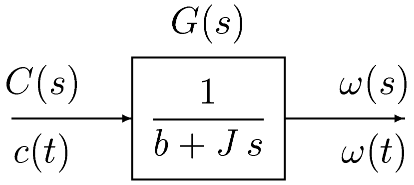
$$\frac{d[J\omega(t)]}{dt} = c(t) - b\,\omega(t) \qquad \leftrightarrow \qquad J\dot{\omega}(t) + b\,\omega(t) = c(t)$$

Partendo da condizioni iniziali nulle e trasformando secondo Laplace si ottiene:

$$J\,s\,\omega(s) + b\,\omega(s) = C(s) \qquad \leftrightarrow \qquad \omega(s) = \frac{1}{b + J\,s}\,C(s)$$

La funzione di trasferimento $G(s)$ che caratterizza il sistema è quindi la seguente:

$$G(s) = \frac{1}{b + J\,s}$$



I coefficienti di questa funzione sono in corrispondenza biunivoca con i coefficienti dell'equazione differenziale. Posto $C(s) = \frac{1}{s}$, la risposta al gradino del sistema in ambito trasformato è la seguente:

$$\omega(s) = G(s)\,C(s) \qquad \rightarrow \qquad \omega(s) = \frac{1}{(b + J\,s)s}$$

Alcune informazioni sull'andamento di $\omega(t)$ si possono ricavare direttamente da $\omega(s)$ anche senza antitrasformare. Applicando il teorema del valore iniziale, per esempio, si ricava il valore di $\omega(t)$ per $t = 0^+$:

$$\omega(0^+) = \omega(t)|_{t\to 0} = \lim_{s\to\infty} s\,\omega(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s}{(b + J\,s)s} = 0$$

Applicando invece il teorema del valore finale si ricava il valore di $\omega(t)$ per $t \to \infty$:

$$\omega(\infty) = \omega(t)|_{t\to\infty} = \lim_{s\to 0} s\,\omega(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s}{(b + J\,s)s} = \frac{1}{b}$$

Applicando il teorema del valore iniziale è anche possibile calcolare il valore dell'accelerazione $\dot{\omega}(t)$ per $t = 0^+$:

$$\dot{\omega}(0^+) = \dot{\omega}(t)|_{t\to 0} = \lim_{s\to\infty} s\,[\underbrace{s\,\omega(s)}_{\dot{\omega}(s)}] = \lim_{s\to\infty} \frac{s^2}{(b + J\,s)s} = \frac{1}{J}$$

Infatti, in ambito trasformato, l'accelerazione $\dot{\omega}(s)$ si ottiene semplicemente moltiplicando la velocità $\omega(s)$ per la variabile s (che rappresenta l'operatore "derivata" di Laplace).
Per ottenere esattamente l'andamento temporale $\omega(t)$ occorre antitrasformare la funzione $\omega(s)$. Il modo più semplice per farlo è utilizzare la scomposizione in fratti semplici. Nel caso in esame, esistono sempre due coefficienti α e β che permettono di scomporre la funzione $\omega(s)$ nel modo seguente:

$$\omega(s) = \frac{1}{(b + J\,s)s} \qquad \leftrightarrow \qquad \omega(s) = \frac{\alpha}{b + J\,s} + \frac{\beta}{s}$$

I coefficienti α e β si determinano (per esempio) imponendo l'uguaglianza fra le due espressioni:

$$\omega(s) = \frac{\alpha}{b + J\,s} + \frac{\beta}{s} = \frac{\alpha s + \beta(b + J\,s)}{(b + J\,s)s} = \frac{(\alpha + \beta J)\,s + \beta b}{(b + J\,s)s} = \frac{1}{(b + J\,s)s}$$

Risolvendo si ricava:

$$\begin{cases} \alpha + \beta J & = & 0 \\ \beta b & = & 1 \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} \alpha & = & -\frac{J}{b} \\ \beta & = & \frac{1}{b} \end{cases}$$

per cui si ha

$$\omega(s) = \frac{1}{(b + J\,s)s} = \frac{1}{b}\left[\frac{1}{s} - \frac{J}{b + J\,s}\right] = \frac{1}{b}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{b}{J}}\right]$$

Antitrasformando i singoli elementi si ricava la funzione $\omega(t)$:

$$\omega(t) = \frac{1}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{J}\,t}\right)$$

L'andamento temporale è di tipo esponenziale: