Scomposizione in fratti semplici

- La determinazione dell'evoluzione libera e dell'evoluzione forzata di un sistema lineare stazionario richiedono l'antitrasformazione di una funzione razionale fratta di questo tipo:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} := \frac{b_m\, s^m + b_{m-1}\, s^{m-1} + \ldots + b_1\, s + b_0}{s^n + a_{n-1}\, s^{n-1} + \ldots + a_1\, s + a_0}$$

- La differenza $r = n - m$ fra i gradi del denominatore e del numeratore prende il nome di *grado relativo* della funzione razionale $F(s)$.

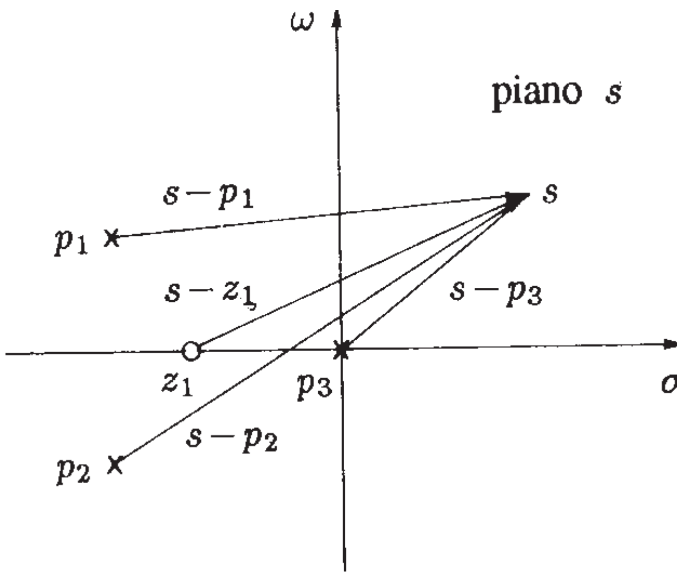
- La funzione $F(s)$ può essere *scomposta in fratti semplici* se è strettamente propria, cioè se presenta una grado relativo $r \geq 1$.

- La funzione $F(s)$ può sempre essere espressa anche in forma fattorizzata:

$$F(s) = K\, \frac{(s - z_1)\,(s - z_2)\ldots(s - z_m)}{(s - p_1)\,(s - p_2)\ldots(s - p_n)}$$

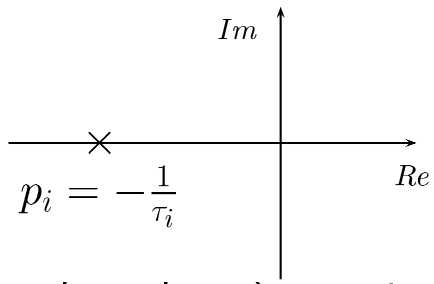
- Le costanti complesse $z_1, \ldots, z_m$ e $p_1, \ldots, p_n$ vengono dette, rispettivamente, *zeri* e *poli* della funzione $F(s)$.

- Valutazione grafica della funzione $F(s)$:



- Ad ogni *polo reale* p_i della funzione $F(s)$ viene associata una *costante di tempo* τ_i così definita:

$$\boxed{\tau_i = -\frac{1}{p_i}}$$

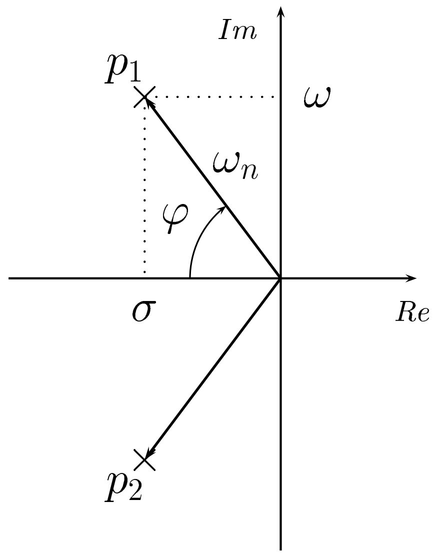


La costante di tempo τ_i è positiva se il polo reale p_i è negativo.

- Un'analoga definizione vale anche per le costanti di tempo τ_j associate agli zeri: $\tau_j = -1/z_j$.

- Nel caso di *poli complessi coniugati* $p_{1,2} = \sigma \pm j\,\omega$ (σ è la parte reale e ω è la parte immaginaria) spesso si utilizza anche la seguente parametrizzazione di "tipo polare":

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= \sigma \pm j\,\omega \\ &= -\delta\,\omega_n \pm j\,\omega_n\sqrt{1-\delta^2} \\ &= -\omega_n \cos\varphi \pm j\,\omega_n \sin\varphi \end{aligned}$$



dove ω_n è detta *pulsazione naturale*:

$$\boxed{\omega_n = |p_1| = |p_2| = \sqrt{\sigma^2+\omega^2}}$$

e δ è detto *coefficiente di smorzamento*:

$$\boxed{\delta = \cos\varphi = \frac{-\sigma}{\sqrt{\sigma^2+\omega^2}}}$$

Valgono quindi le relazioni seguenti:

$$\boxed{\sigma = -\delta\,\omega_n, \qquad \omega = \omega_n\sqrt{1-\delta^2}}$$

- L'utilizzo della parametrizzazione polare $(\delta,\ \omega_n)$ risulterà molto utile nello studio temporale e frequenziale dei sistemi dinamici lineari.

- In relazione all'antitrasformazione si distinguono due casi:
  - *i)* tutti i poli sono *semplici*;
  - *ii)* si hanno poli *multipli*.
- Nel caso di *poli semplici* la funzione può essere scomposta come segue:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{K_i}{s-p_i}$$

- Le costanti K_i (dette *residui*) sono reali in corrispondenza dei poli reali, complesse coniugate in corrispondenza delle coppie di poli complessi coniugati. Esse si ricavano utilizzando la formula:

$$\boxed{K_i = (s-p_i)\frac{P(s)}{Q(s)}\bigg|_{s=p_i}}$$

- Una volta che la funzione $F(s)$ è stata scomposta in fratti semplici, è immediato antitrasformarla:

$$\boxed{f(t) = \sum_{i=1}^{n} K_i\, e^{p_i t}}$$

- Esempio. Sia

$$F(s) := \frac{5\,s+3}{(s+1)\,(s+2)\,(s+3)} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2} + \frac{K_3}{s+3}$$

I residui si calcolano nel modo seguente:

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{5\,(-1)+3}{(-1+2)\,(-1+3)} = -1 \\ K_2 &= \frac{5\,(-2)+3}{(-2+1)\,(-2+3)} = 7 \\ K_3 &= \frac{5\,(-3)+3}{(-3+1)\,(-3+2)} = -6 \end{aligned}$$

per cui si può scrivere

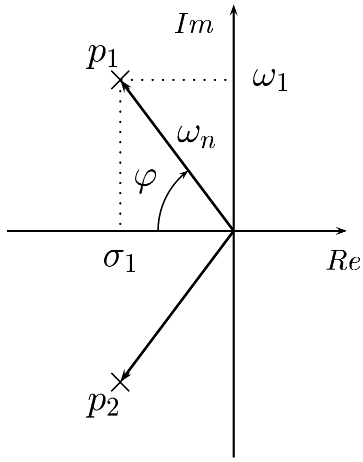
$$F(s) = -\frac{1}{s+1} + \frac{7}{s+2} - \frac{6}{s+3}$$

e quindi

$$f(t) = -e^{-t} + 7\,e^{-2t} - 6\,e^{-3t}$$

Quando si hanno coppie di *poli complessi coniugati*

$$p_1 = \sigma_1 + j\,\omega_1, \qquad p_2 = \sigma_1 - j\,\omega_1$$



anche i residui sono complessi coniugati

$$K_1 = u_1 + j\,v_1, \qquad K_2 = u_1 - j\,v_1$$

La somma di fratti semplici ad essi relativa è

$$\frac{u_1 + j\,v_1}{s - \sigma_1 - j\,\omega_1} + \frac{u_1 - j\,v_1}{s - \sigma_1 + j\,\omega_1}$$

Posto

$$\boxed{M_1 := 2|K_1| = 2\sqrt{u_1^2 + v_1^2}, \qquad \varphi_1 := \arg K_1 = \arg\,(u_1 + j\,v_1)},$$

si può scrivere

$$\frac{M_1}{2}\left(\frac{e^{j\varphi_1}}{s - \sigma_1 - j\,\omega_1} + \frac{e^{-j\varphi_1}}{s - \sigma_1 + j\,\omega_1}\right),$$

da cui, antitrasformando, si ottiene

$$\frac{M_1}{2}\left(e^{\sigma_1 t + j(\omega_1 t + \varphi_1)} + e^{\sigma_1 t - j(\omega_1 t + \varphi_1)}\right),$$

funzione che può essere posta nella forma

$$\boxed{M_1\, e^{\sigma_1 t}\cos(\omega_1 t + \varphi_1)} \qquad \text{oppure} \qquad \boxed{M_1\, e^{\sigma_1 t}\,\mathrm{sen}(\omega_1 t + \varphi_1 + \pi/2)}$$

Esempio. Sia:

$$F(s) := \frac{7s^2 - 8s + 5}{s^3 + 2s^2 + 5s} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s + 1 - j2} + \frac{K_3}{s + 1 + j2}$$

I residui sono i seguenti:

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{7\cdot 0 - 8\cdot 0 + 5}{(0 + 1 - j2)\,(0 + 1 + j2)} = 1 \\ K_2 &= \frac{7\,(-1 + j2)^2 - 8\,(-1 + j2) + 5}{(-1 + j2)\,(-1 + j2 + 1 + j2)} = 3 + j4 \\ K_3 &= \frac{7\,(-1 - j2)^2 - 8\,(-1 - j2) + 5}{(-1 - j2)\,(-1 - j2 + 1 - j2)} = 3 - j4 \end{aligned}$$

e pertanto

$$F(s) = \frac{1}{s} + \frac{3 + j4}{s + 1 - j2} + \frac{3 - j4}{s + 1 + j2},$$

da cui, antitrasformando,

$$f(t) = 1 + 10\,e^{-t}\cos\,(2t + \varphi),$$

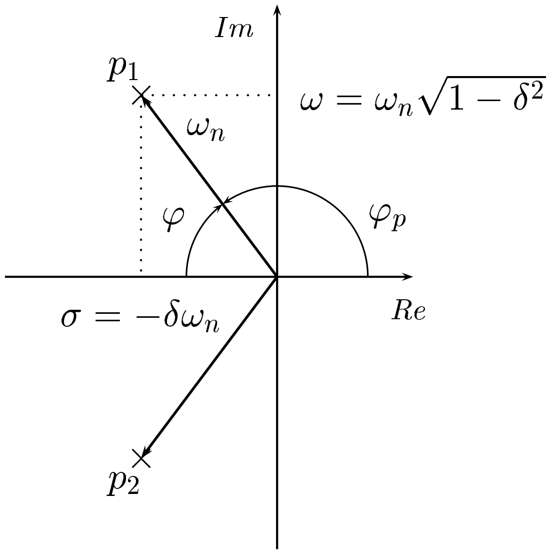
dove $10 = 2|K_2| = 2\sqrt{3^2 + 4^2}$ e $\varphi = \arctan(4/3) = 53.13°$.

Esempio. Si calcoli la risposta al gradino unitario del seguente sistema:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Occorre antitrasformare la seguente funzione di uscita:

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s)X(s) \\ &= \frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\delta\omega_n s+\omega_n^2)} \\ &= \frac{\omega_n^2}{s(s-\omega_n e^{j\varphi_p})(s-\omega_n e^{-j\varphi_p})} \\ &= \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s-\omega_n e^{j\varphi_p}} + \frac{K_2^*}{s-\omega_n e^{-j\varphi_p}} \end{aligned}$$



dove

$$p_{1,2} = -\delta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\delta^2}$$

e

$$\varphi_p = \pi - \varphi = \pi - \arccos\delta$$

Il calcolo dei residui è immediato:

$$\begin{aligned} K_1 &= \lim_{s\to 0} \frac{\omega_n^2}{s^2+2\delta\omega_n s+\omega_n^2} = 1 \\ K_2 &= \lim_{s\to\omega_n e^{j\varphi_p}} \frac{\omega_n^2}{s(s-\omega_n e^{-j\varphi_p})} = \frac{\omega_n^2}{\omega_n e^{j\varphi_p}(\omega_n e^{j\varphi_p}-\omega_n e^{-j\varphi_p})} = \frac{e^{-j\varphi_p}}{2j\sin\varphi_p} \end{aligned}$$

Essendo:

$$\begin{aligned} M_1 &= 2|K_2| = \frac{1}{|\sin\varphi_p|} = \frac{1}{|\sin(\pi-\varphi)|} = \frac{1}{\sin\varphi} = \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}} \\ \varphi_1 &= \arg K_2 = -\varphi_p - \frac{\pi}{2} = -(\pi-\varphi) - \frac{\pi}{2} = \varphi + \frac{\pi}{2} = \arctan\frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta} + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

e antitrasformando si ottiene ($\cos(\alpha+\frac{\pi}{2}) = -\sin\alpha$):

$$\begin{aligned} y(t) &= 1 + M_1 e^{-\delta\omega_n t}\cos\left[\omega_n\sqrt{1-\delta^2}\,t + \varphi_1\right] \\ &= 1 + \frac{e^{-\delta\omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}}\cos\left[\omega_n\sqrt{1-\delta^2}\,t + \arctan\frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta} + \frac{\pi}{2}\right] \\ &= 1 - \frac{e^{-\delta\omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}}\sin\left[\omega_n\sqrt{1-\delta^2}\,t + \arctan\frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}\right] \end{aligned}$$

Antitrasformazione: il caso di *poli multipli*

- Si suppone che la funzione razionale $F(s)$ abbia h poli distinti p_i ($i = 1,\ldots,h$), ciascuno caratterizzato da un ordine di molteplicità $r_i \geq 1$ ($\sum_{i=1}^{h} r_i = n$):

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{(s-p_1)^{r_1}(s-p_2)^{r_2}\ldots(s-p_h)^{r_h}} = \sum_{i=1}^{h}\sum_{\ell=1}^{r_i} \frac{K_{i\ell}}{(s-p_i)^{r_i-\ell+1}}$$

- Le costanti $K_{i\ell}$ si ricavano mediante la formula

$$\boxed{K_{i\ell} = \frac{1}{(\ell-1)!}\,\frac{d^{\,\ell-1}}{ds^{\,\ell-1}}(s-p_i)^{r_i}\,\frac{P(s)}{Q(s)}\bigg|_{s=p_i}}$$

dove ($i = 1,\ldots,h; \ell = 1,\ldots,r_i$). Antitrasformando la $F(s)$ si ottiene:

$$\boxed{f(t) = \sum_{i=1}^{h}\sum_{\ell=1}^{r_i}\frac{K_{i\ell}}{(r_i-\ell)!}\,t^{r_i-\ell}\,e^{p_i t}}$$

- I coefficienti $K_{i\ell}$ sono complessi coniugati in corrispondenza di poli complessi coniugati. I termini complessi coniugati corrispondono a prodotti di esponenziali reali e funzioni trigonometriche, e si ottengono con un procedimento del tutto analogo a quello seguito nel caso di poli distinti.

- Esempio:

$$F(s) = \frac{1}{(s+2)\,(s+1)^2} = \frac{K_{11}}{s+2} + \frac{K_{22}}{s+1} + \frac{K_{21}}{(s+1)^2}$$

dove

$$\begin{aligned}
K_{11} &= [(s+2)\,F(s)]\,\big|_{s=-2} = 1\\
K_{22} &= \frac{d}{ds}\left[\,(s+1)^2\,F(s)\right]\bigg|_{s=-1} = \frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s+2}\right]\bigg|_{s=-1} = -1\\
K_{21} &= \left[(s+1)^2\,F(s)\right]\big|_{s=-1} = 1
\end{aligned}$$

Antitrasformando si ottiene:

$$f(t) = e^{-2t} - e^{-t} + t\,e^{-t}$$

Sviluppi in somme di fratti semplici

- Si consideri il rapporto di polinomi

$$F(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1}\, s^{m-1} + \ldots + b_1\, s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}\, s^{n-1} + \ldots + a_1\, s + a_0}$$

- Valgono le seguenti proprietà:

  – *i)* se è $n=m+1$, la somma dei residui di $F(s)$ è $\frac{b_m}{a_n}$;

  – *ii)* se è $n \geq m+2$, la somma dei residui di $F(s)$ è zero.

  Si ricorda che, nello sviluppo in fratti, i residui di $F(s)$ sono i coefficienti dei termini con polinomio a denominatore di primo grado.

- Esempio 1:

$$F(s) = \frac{s - z_1}{(s-p_1)\,(s-p_2)\,(s-p_3)} = \frac{A}{s-p_1} + \frac{B}{s-p_2} + \frac{C}{s-p_3}$$

  Calcolati A e B, il calcolo del residuo C è immediato: $C = -(A+B)$.

- Esempio 2:

$$F(s) = \frac{1}{(s-p_1)^2\,(s-p_2)} = \frac{A}{(s-p_1)^2} + \frac{B}{s-p_1} + \frac{C}{s-p_2}$$

  Il coefficiente A e il residuo C si possono calcolare immediatamente:

$$A = \frac{1}{p_1 - p_2}\,, \quad C = \frac{1}{(p_2 - p_1)^2}$$

  Applicando la proprietà *ii* si deduce: $B = -C$.

- Esempio 3:

$$F(s) = \frac{s - z_1}{(s-p_1)^3\,(s-p_2)} = \frac{A}{(s-p_1)^3} + \frac{B}{(s-p_1)^2} + \frac{C}{s-p_1} + \frac{D}{s-p_2}$$

  Il coefficiente A e il residuo D si calcolano immediatamente. Applicando la proprietà *ii* si deduce: $C = -D$. Moltiplicando ambo i membri dello sviluppo per $(s - p_1)$ si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{s - z_1}{(s-p_1)^2\,(s-p_2)} &= \frac{A}{(s-p_1)^2} + \frac{B}{s-p_1} + C + D\,\frac{s-p_1}{s-p_2} \\ &= \frac{A}{(s-p_1)^2} + \frac{B}{s-p_1} + \frac{E}{s-p_2} \end{aligned}$$

  da cui si calcola

$$E = \frac{p_2 - z_1}{(p_2 - p_1)^2}$$

  Applicando la proprietà *ii* al nuovo sviluppo, si ottiene $B = -E$.

- L'unica difficoltà nell'antitrasformazione delle funzioni razionali fratte è la fattorizzazione del polinomio a denominatore.

- Il comportamento dell'antitrasformata per t tendente all'infinito è legato alla posizione dei poli in rapporto all'asse immaginario. Infatti, nel caso di poli semplici si hanno termini (*modi*) del tipo:

$$K \ , \quad K\, e^{\sigma t} \ , \quad K\, e^{\sigma t} \operatorname{sen}(\omega\, t + \varphi)$$

  in cui σ e ω sono le parti reale e immaginaria dei poli considerati, mentre nel caso di poli multipli si hanno termini (*modi*) del tipo:

$$K\, t^h \ , \quad K\, t^h\, e^{\sigma t} \ , \quad K\, t^h\, e^{\sigma t} \operatorname{sen}(\omega\, t + \varphi)$$

  in cui h è un intero compreso fra l'unità e $r-1$, essendo r l'ordine di molteplicità dei poli considerati.

- Nel caso di *poli semplici*, i termini tendono a zero per t tendente all'infinito se la parte reale del relativo polo è negativa, restano limitati se essa è nulla e divergono se essa è positiva.

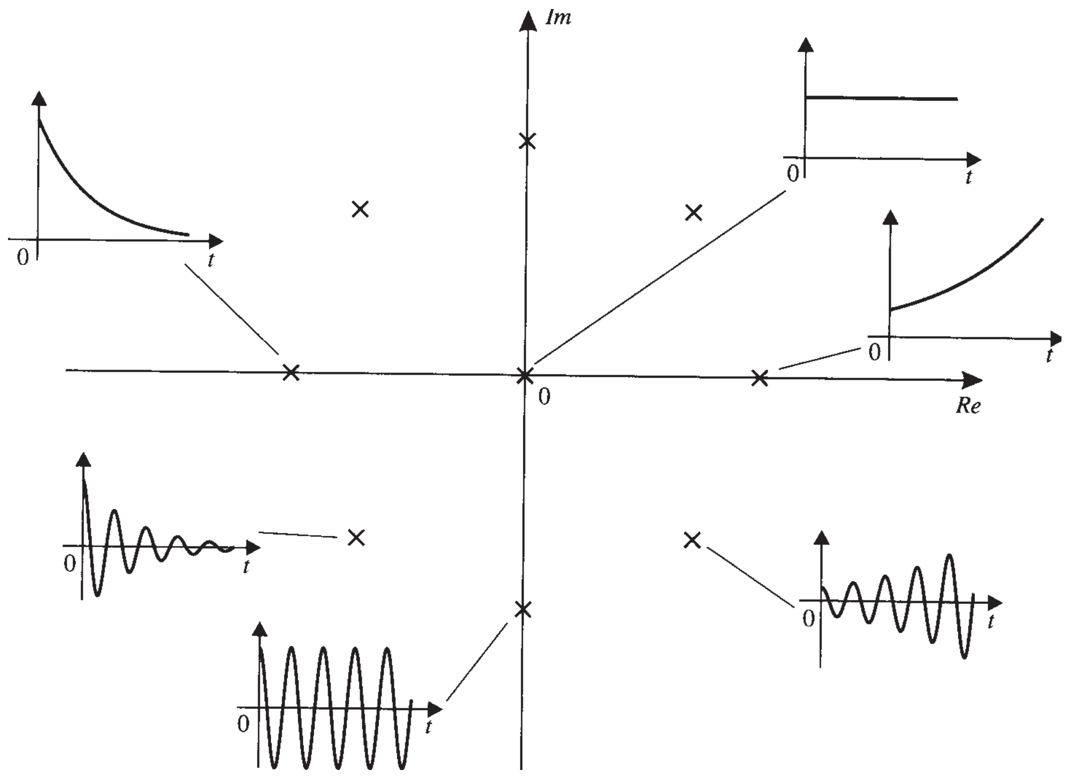
- Nel caso di *poli multipli*, i termini tendono a zero se la parte reale del relativo polo è negativa e divergono se essa è nulla o positiva.

- L'antitrasformata di una funzione razionale fratta rimane limitata se e solo se la funzione da antitrasformare non presenta alcun polo a parte reale positiva e gli eventuali poli a parte reale nulla sono semplici, diverge in caso contrario.

- I poli che caratterizzano la trasformata della risposta del sistema a un segnale di ingresso (come l'impulso di Dirac, il gradino, la sinusoide) sono quelli della funzione di trasferimento, più quelli relativi al segnale di ingresso.

- Il *sistema* risulta *stabile* (asintoticamente) quando tutti i suoi poli sono a parte reale negativa: infatti in tal caso le sue variabili tendono a riacquistare asintoticamente per t tendente all'infinito i valori che avevano prima della perturbazione.

- Modi della risposta nel caso di autovalori distinti ($r = 1$):



- Modi della risposta nel caso di autovalori multipli ($r = 2$):