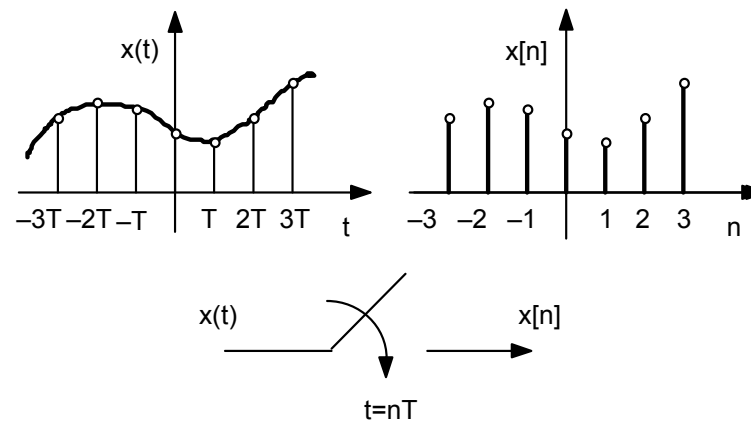


Campionamento dei segnali

- Un caso più tipico nell'elaborazione dei segnali è quello in cui il segnale a tempo discreto $x[n]$ viene ottenuto da un segnale a tempo continuo $x(t)$ attraverso la cosiddetta operazione di *campionamento*. *Campionare* un segnale significa “estrarre” dal segnale stesso i valori che esso assume a istanti temporali equispaziati, cioè multipli di un intervallo T detto *periodo di campionamento*, come viene illustrato nella figura seguente. Con questa operazione viene a crearsi una *sequenza* il cui valore n -esimo è il valore assunto dal segnale a tempo continuo all'istante :

$$x[n] = x(nT)$$

Campionamento dei segnali



Campionamento di un segnale analogico

Campionamento dei segnali

•Nella figura precedente, l'operazione di campionamento viene simbolicamente effettuata da un dispositivo, il *campionatore*, indicato con una sorta di “interruttore” che si chiude per un intervallo di durata infinitesima. La *cadenza* con cui l'interruttore si chiude, cioè con la quale il segnale viene campionato, è pari a

$$f_c = \frac{1}{T}$$

e prende il nome di *frequenza di campionamento (sampling frequency)*, misurata in Hz o in campioni/s.

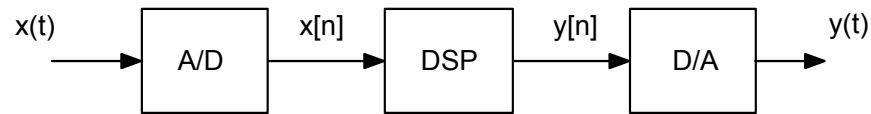
Campionamento dei segnali

•Nella pratica l'operazione di campionamento viene effettuata dai *convertitori analogico/digitale* (comunemente detti *convertitori A/D*). Questi dispositivi sono comandati da un segnale di *clock* (temporizzazione) alla frequenza f_c , che fornisce gli impulsi di comando al circuito per effettuare le varie operazioni di campionamento. Il campionatore *ideale* della figura precedente estrae in corrispondenza di ogni impulso di clock il valore del segnale di ingresso all'istante di campionamento, che è in generale un numero reale con infinite cifre decimali. Diversamente dal campionatore ideale, il convertitore A/D rende invece una *rappresentazione finita* di questo numero reale (segnale *numerico*), e precisamente in aritmetica binaria su un numero finito di cifre (bit), variabile in genere da 8 a 16. Il piccolo errore insito nella rappresentazione del numero reale su un numero finito di cifre è detto *errore di quantizzazione*. Per semplicità nell'analisi dei sistemi si immagina spesso di effettuare operazioni di campionamento *ideali*.

Campionamento dei segnali

• Lo studio e l'elaborazione dei segnali a tempo discreto ha assunto grande importanza in questi ultimi per la possibilità di utilizzare componenti numerici ad alta velocità e affidabilità, e a basso costo. La tendenza moderna, risultante dai grandi progressi compiuti dai componenti elettronici ad altissima integrazione (VLSI, *Very Large-Scale Integration*), è quella di usare per l'elaborazione dei segnali a tempo discreto dei *microprocessori specializzati* (dedicati) chiamati DSP (*Digital Signal Processor*, elaboratore numerico di segnali). L'elaborazione del segnale viene eseguita sui valori *digitali* estratti dal segnale stesso tramite conversione A/D, e si risolve nell'esecuzione di un opportuno *programma* da parte del microprocessore. Questa struttura, rappresentata nella figura seguente, è estremamente flessibile, nel senso che diverse funzioni di elaborazione possono essere realizzate semplicemente cambiando il *programma* di elaborazione (software) senza dover minimamente modificare la struttura fisica (hardware) del circuito.

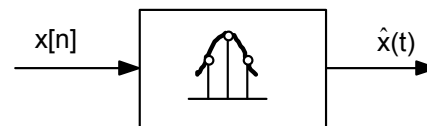
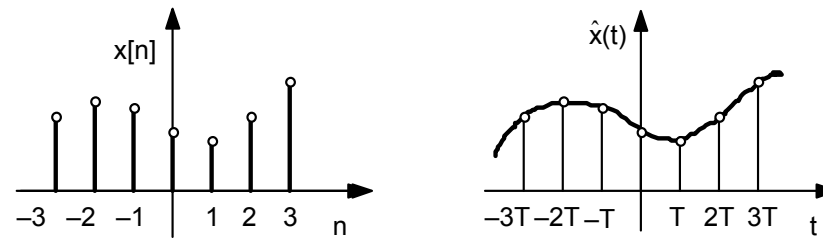
Campionamento dei segnali



Elaborazione numerica di un segnale a tempo continuo

- Il segnale a tempo discreto $y[n]$ risultante dall'elaborazione numerica deve poi essere *riconvertito* in forma analogica (cioè in un segnale a tempo continuo). Questa operazione è la *conversione digitale/analogico* (D/A) indicata nella figura di sopra. Dal punto di vista teorico, il dispositivo che produce in uscita un segnale a tempo continuo a partire da un segnale d'ingresso a tempo discreto è chiamato *interpolatore*, e il suo funzionamento è schematizzato nella figura seguente.

Campionamento dei segnali



Interpolazione di un segnale a tempo discreto

Campionamento dei segnali

- **La condizione di Nyquist e il teorema del campionamento**

Se il segnale $x(t)$ è a banda limitata, è possibile trovare una condizione che garantisce *assenza di perdita di informazione nel campionamento del segnale*. Fissata la banda del segnale B , la frequenza di campionamento deve essere scelta in modo che valga la condizione

$$f_c = \frac{1}{T} \geq 2B$$

detta *condizione di Nyquist*. Rimane ovviamente il problema di *ricostruire il segnale originario (a banda limitata) elaborando il segnale campionato*.

Campionamento dei segnali

•Esempio

Osservazioni sperimentali di carattere fisiologico mostrano che l'orecchio umano può udire segnali costituiti da componenti frequenziali comprese al più nella banda tra 20 Hz e 20 kHz. Suoni con frequenza inferiore ai 20 Hz vengono percepiti come “vibrazioni” con tutto il corpo, mentre suoni con frequenza maggiore di 20 kHz sono inudibili e vengono chiamati *ultrasuoni*.

Possiamo quindi considerare un segnale audio come *rigorosamente limitato in banda* con un limite di banda $B = 20$ kHz. Questa osservazione, insieme con la condizione di Nyquist, giustifica la scelta delle due frequenze standard di campionamento nell'elaborazione numerica dei segnali audio ad alta fedeltà: come già accennato, i sistemi di registrazione su Compact-Disc adottano una $f_c = 44.1$ kHz, mentre i registratori DAT (Digital Audio Tape) hanno $f_c = 48$ kHz.

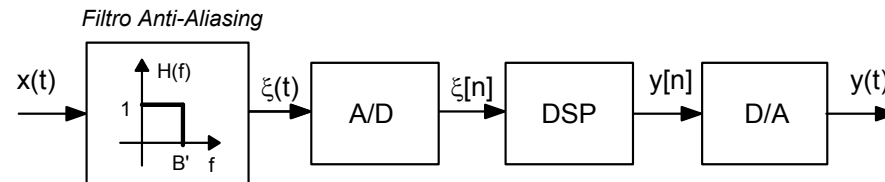
Entrambi questi valori sono di poco superiori al limite minimo $f_c = 2B = 40$ kHz; viene introdotto un margine “di sicurezza” per facilitare l'operazione di ricostruzione del segnale analogico.

Campionamento dei segnali

Quando il segnale audio campionato deve essere *trasmesso*, come in un sistema di radiodiffusione, è importante cercare di ridurre al minimo il numero di campioni/s, cioè la frequenza di campionamento. Infatti, più campioni devono essere trasmessi nello stesso intervallo di tempo, maggiore deve essere la *capacità* (e quindi il costo) del sistema di trasmissione. Per questo motivo, in alcuni standard di radiodiffusione dell'audio digitale, si sceglie di campionare il segnale con $f_c = 32$ kHz. Questa frequenza *non* soddisfa chiaramente la condizione di Nyquist rispetto alla banda

$B = 20$ kHz. Allora, per evitare problemi di aliasing, si antepone al convertitore A/D un *filtro* (detto *filtro anti-aliasing*), come mostrato nella figura successiva, che limita convenientemente la banda del segnale analogico a un valore B' in modo da rispettare la condizione di Nyquist. Nel caso dello standard con $f_c = 32$ kHz, il filtro anti-aliasing ha una banda $B' = 15$ kHz. È chiaro che in questo modo la qualità del segnale riprodotto sarà inferiore a quella dei sistemi CD e DAT per l'artificiale limitazione in banda, ma ancora sufficientemente elevata per una riproduzione godibile, e con una minore esigenza di capacità del sistema di trasmissione.

Campionamento dei segnali

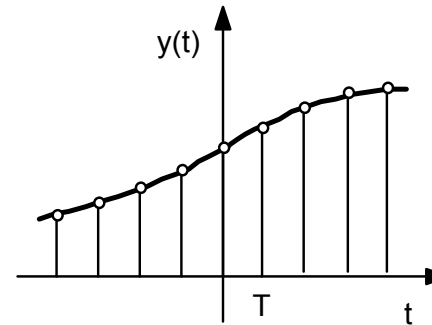
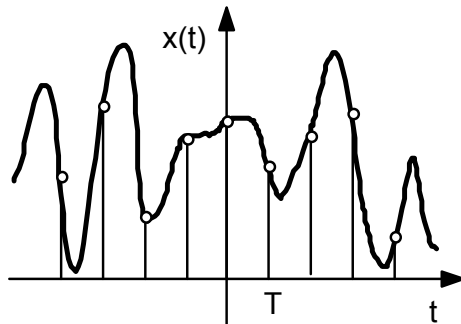


Elaborazione numerica del segnale con filtro anti aliasing

- La condizione di Nyquist pone dei vincoli sulla scelta della frequenza di campionamento se si desidera ricostruire un segnale a tempo continuo utilizzandone i campioni; in particolare, il periodo di campionamento deve essere scelto in funzione della *banda* del segnale analogico. Gli esempi illustrati nelle due figure successive giustificano ulteriormente questa condizione. Nella figura (a) viene rappresentato un segnale $x(t)$ che ha una *rapidità di variazione* (e quindi una *banda*) molto maggiore di quella del segnale $y(t)$ della figura (b).

Campionamento dei segnali

Esempi di campionamento di segnali a tempo continuo



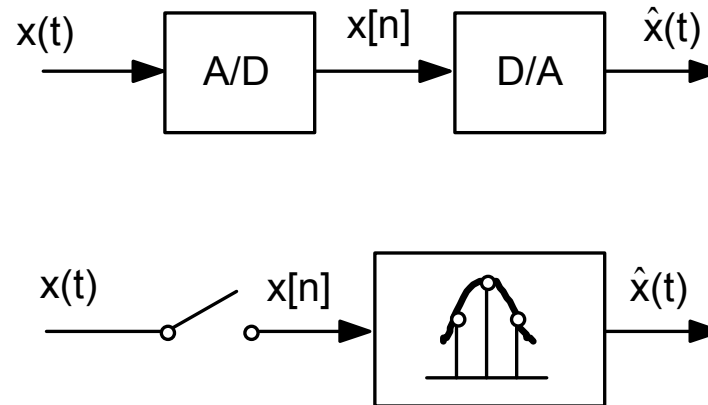
- Si intuisce allora che, per seguire con sufficiente accuratezza l'andamento del segnale, e quindi poter poi essere in grado di ricostruire il medesimo a partire dai campioni prelevati, si deve adottare un periodo di campionamento *più piccolo* (frequenza di campionamento maggiore) per il segnale $x(t)$ che per $y(t)$. Negli esempi di queste due figure, il periodo di campionamento scelto è adeguato per $y(t)$, ma è palesemente troppo grande per $x(t)$. In questo senso, la frequenza di campionamento deve essere commisurata con la *banda* del segnale, come la condizione di Nyquist suggerisce.

Campionamento dei segnali

- La ricostruzione di un segnale a tempo continuo a partire da una sequenza viene realizzata mediante un *interpolatore*. I vari tipi di interpolazione possono in un certo senso considerarsi come una *generalizzazione* dell'operazione compiuta in pratica da un convertitore D/A per fornire in uscita un segnale a tempo continuo $\hat{x}(t)$ a partire dai valori (rappresentati su di un certo numero di cifre binarie) di una sequenza $x[n]$.

- Lo schema di un sistema che esegue in pratica il campionamento del segnale e la successiva interpolazione, senz'alcuna elaborazione intermedia, è rappresentato nella figura successiva come cascata di due blocchi A/D e D/A, ovvero come successione di un campionatore ideale e di un *interpolatore a mantenimento*.

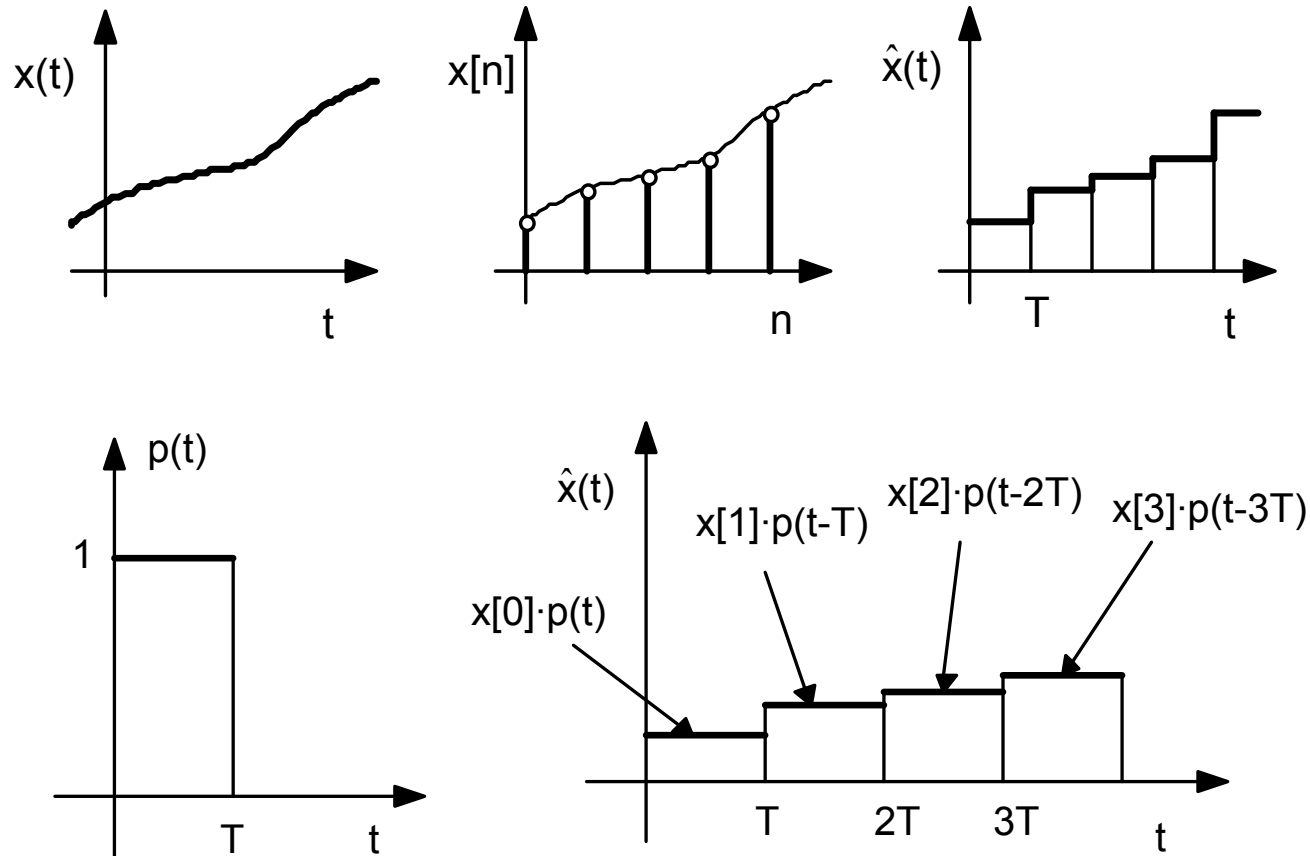
Campionamento dei segnali



Campionamento e interpolazione a mantenimento

- L'operazione svolta da quest'ultimo componente è in particolare raffigurata nella figura successiva: per costruire il segnale analogico di uscita, il valore n -esimo della sequenza d'ingresso $x[n]$ viene *mantenuto* a partire dall'istante $t = nT$ e fino a che non sia disponibile (all'istante $t = (n+1)T$) il successivo valore $x[n+1]$.

Campionamento dei segnali



Campionamento e interpolazione a mantenimento

Campionamento dei segnali

- Possiamo facilmente scrivere l'espressione del segnale interpolato $\hat{x}(t)$ in funzione dei valori della sequenza $x[n]$. La figura precedente suggerisce che $\hat{x}(t)$ è costituito da una successione di *impulsi rettangolari* di durata T , applicati agli istanti nT e di ampiezza pari al relativo valore n -esimo della sequenza $x[n]$:

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] p(t - nT)$$

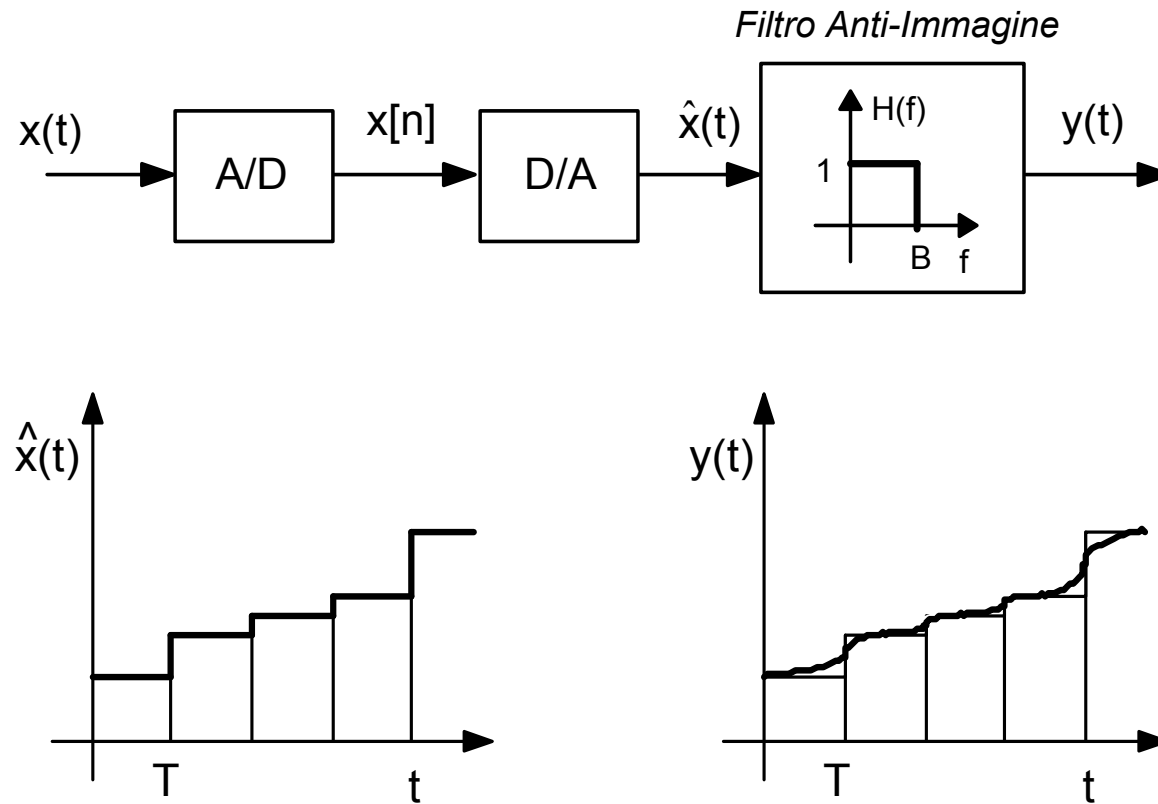
ove $p(t)$ è un impulso rettangolare di durata pari a T sec.

- La figura precedente mostra però chiaramente che il segnale ricostruito dall'interpolatore a mantenimento, che è una forma d'onda *costante a tratti*, non è una replica indistorta del segnale campionato $x(t)$. L'operazione che direttamente conduce da $x[n]$ al segnale costante a tratti $\hat{x}(t)$ viene indicata in elettronica con il nome di *Sample & Hold* (campiona e mantieni), abbreviato in S&H.

Campionamento dei segnali

- Lo spettro del segnale ricostruito differisce apprezzabilmente da quello del segnale analogico di partenza. Ad esempio il segnale interpolato non è limitato in banda: l'operazione di ricostruzione del segnale introduce delle componenti frequenziali che non sono presenti nel segnale analogico e che sono chiamate *immagini*. Inoltre anche all'interno della banda “utile” lo spettro del segnale ricostruito differisce dallo spettro del segnale di partenza (si ha distorsione di ampiezza).
- Si può ovviare alla questione delle immagini usando un *filtro anti-immagine* all'uscita dell'interpolatore (convertitore D/A) come indicato nella figura successiva. Esso è un filtro passa-basso di banda B che elimina le immagini dallo spettro del segnale interpolato, riconducendo il segnale nella banda originaria.

Campionamento dei segnali



Filtro anti-immagine $H(f)$ e suo effetto nel tempo

Campionamento dei segnali

- Come indicato nella figura precedente, l'effetto del filtro anti-immagine in ambito temporale è quello di *smussare* il segnale costante a tratti, e quindi con discontinuità, per ricondurlo a un andamento più somigliante a quello del segnale analogico originario.

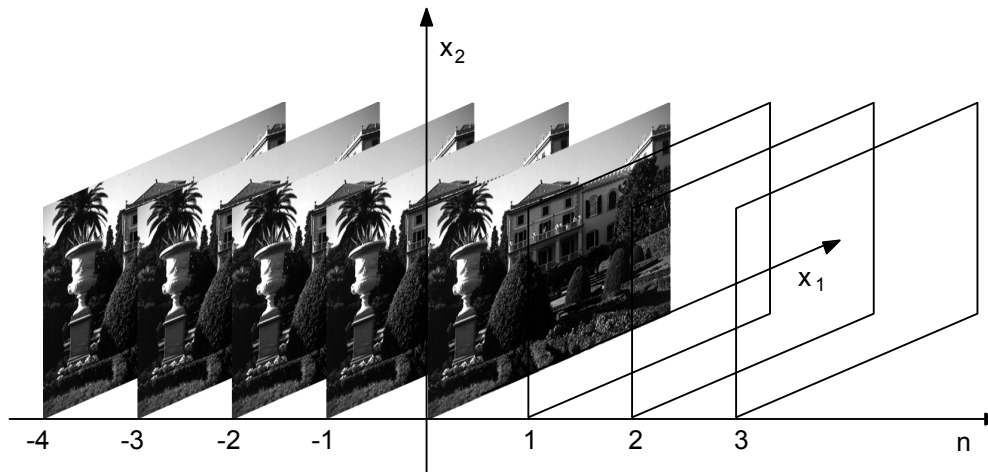
- **Esempio**

Il segnale *cinematografico* della figura seguente, come abbiamo già discusso precedentemente, è una *sequenza temporale di immagini*, cioè un segnale bidimensionale continuo per quel che riguarda le coordinate spaziali (x_1, x_2) che identificano il pixel nell'immagine, ma *discreto* per quel che riguarda il tempo. Questo segnale a tempo discreto $z(x_1, x_2, n]$ viene ottenuto attraverso il *campionamento* di un segnale a tempo continuo $z(x_1, x_2; t)$ che rappresenta la scena effettivamente osservata dalla cinepresa.

Campionamento dei segnali

Il *campionatore* di questo sistema è l'*otturatore* della cinepresa che fissa sulla pellicola il “campione” del segnale (cioè il fotogramma) al generico istante di scatto dell'otturatore stesso. La frequenza di campionamento è $f_c = 24$ Hz, cioè 24 fotogrammi al secondo. La sequenza di immagini ottenuta (ossia il segnale a tempo discreto) viene poi *registrata* sulla pellicola cinematografica, così come i campioni di un segnale audio vengono registrati su di un CD.

Segnale
cinematografico a
tempo discreto



Campionamento dei segnali

In fase di proiezione, si desidera ricostruire il segnale *a tempo continuo* originario. Per far questo si usa un *interpolatore a mantenimento*, cioè il proiettore cinematografico. Nella proiezione (in cui l'ingrandimento sullo schermo è inessenziale perché crea una replica fedele delle immagini sulla pellicola), il valore del segnale campionato (cioè l'immagine *fissa* di ogni fotogramma) viene *mantenuto* per 1/24 di secondo fino all'arrivo del valore (fotogramma) successivo. Il procedimento di interpolazione con mantenimento è efficace, cioè non si ha apparentemente percezione della “granularità” del movimento effettivamente ricostruito, perché l'occhio umano svolge la funzione di *filtro anti-immagine*. Il dato, spesso citato, di “tempo di permanenza delle immagini sulla retina” pari a circa 0.1 s porta a valutare la “banda” dell'occhio umano in circa 10 Hz, e quindi l'effetto anti-immagine filtrante è adeguato vista la frequenza di campionamento di 24 Hz.

Campionamento dei segnali

Tuttavia, nelle proiezioni cinematografiche si notano spesso *artefatti*, come l'effetto per cui le pale del rotore di un elicottero o i raggi delle ruote di un carro sembrano ruotare molto lentamente o addirittura in verso contrario a quello reale. È in grado il lettore di spiegare questi fenomeni?

Campionamento dei segnali

- **Teorema del campionamento** (C. Shannon): Un segnale $x(t)$ il cui spettro è limitato nella banda B può essere ricostruito esattamente a partire dai propri campioni, purché la frequenza di campionamento non sia inferiore a $2B$.
- La formula per la ricostruzione esatta del segnale *formula di interpolazione cardinale* La ricostruzione di un segnale a banda limitata a un certo istante ante mediante questa formula richiede la conoscenza di *tutta* la sequenza di campioni del segnale stesso, in istanti sia antecedenti quello considerato, sia *successivi*. Pertanto la formula di interpolazione cardinale, di grande rilevanza teorica, è inutilizzabile nella sua forma esatta nelle applicazioni pratiche per due motivi: in primo luogo, sono in teoria richiesti *infiniti* termini di una opportuna sommatoria per ricostruire il segnale originario; secondariamente, una ricostruzione in tempo reale è impossibile perché si richiederebbe la conoscenza di valori di segnale in istanti *successivi* a quello di interpolazione (interpolatore *non causale*).

Campionamento dei segnali

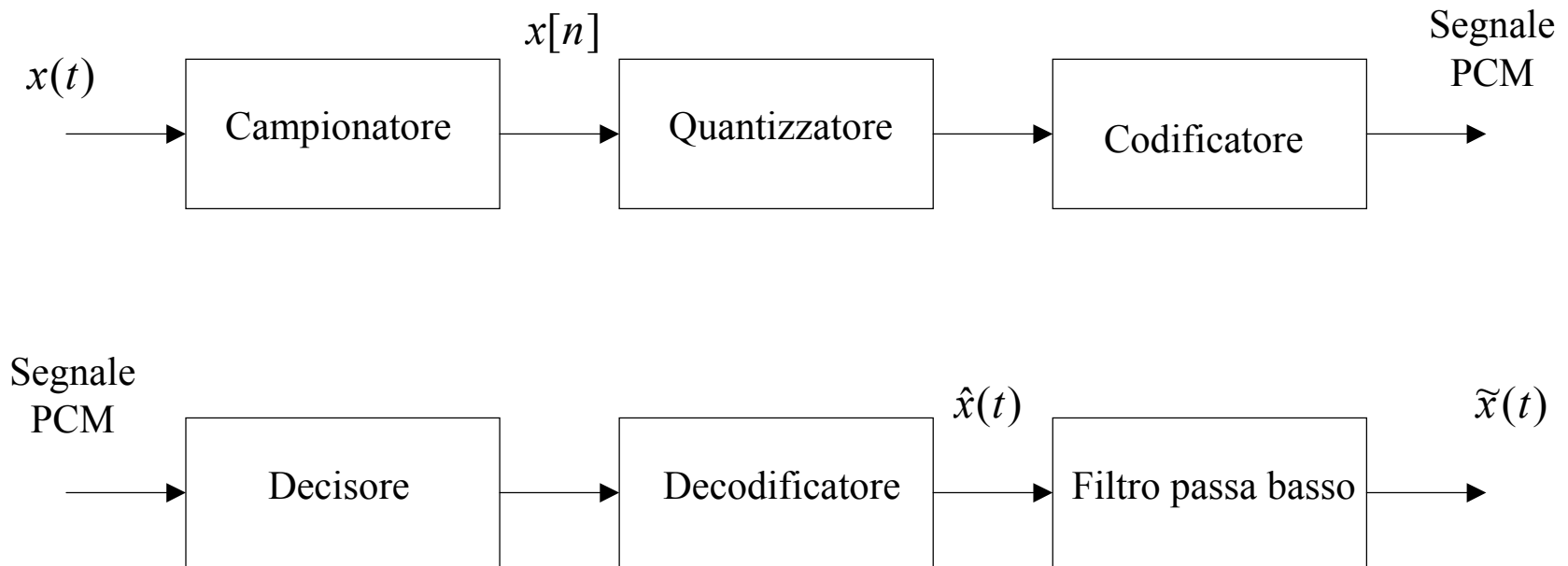
•Sistemi PCM

Nei sistemi PCM il segnale $x(t)$, a banda limitata B , viene prima campionato; successivamente, poiché si è stabilito di inviare un numero finito di valori, i campioni di $x(t)$ vengono quantizzati, cioè vengono approssimati al valore del livello più vicino tra quelli previsti. A questo punto l'informazione relativa all'ampiezza di ciascun campione quantizzato viene trasmessa con un gruppo di impulsi codificati.

- Un'applicazione tipica della tecnica PCM è la telefonia nella quale il segnale audio viene campionato ad una frequenza pari a 8 kHz. Ciascun campione viene poi rappresentato con uno fra 256 possibili livelli (8bit). Questa operazione comporta quindi la generazione di un flusso di dati binari con velocità pari a 64 kbit/sec per ciascun canale telefonico

Campionamento dei segnali

Sistema PCM



Campionamento dei segnali

- Il ricevitore PCM è costituito da un decisore che ricostruisce il segnale numerico; segue un decodificatore, alla cui uscita si ricavano i campioni quantizzati del segnale ed infine un filtro passa basso che restituisce un'approssimazione del segnale $x(t)$.
- La distorsione introdotta dal sistema PCM viene compensata dal fatto che il sistema PCM è meno sensibile al rumore rispetto ai sistemi che trasmettono il segnale analogico. Infatti il ricevitore, per decidere correttamente il segnale, deve decidere soltanto sulla presenza o meno degli impulsi relativi alle cifre, indipendentemente dalla loro ampiezza o durata.
- Ciascun utente del servizio telefonico è connesso alla centrale telefonica più vicina mediante una coppia di fili in rame (doppino). Le conversioni A/D e D/A vengono svolte presso la centrale.

Sistemi di comunicazione digitali

- Elenchiamo ora peculiarità dei sistemi digitali che ne giustificano l'adozione.

Fra queste ricordiamo:

1. L'impiego di sistemi digitali permette di disporre di una grande flessibilità o capacità multimediale. Uno stesso formato di modulazione può essere utilizzato per trasmettere dati o informazioni vocali e video, generando segnali digitali identici tranne che per la diversa velocità di segnalazione.
2. L'indirizzamento e l'instradamento dei messaggi nei sistemi di comunicazione multiutente può essere effettuato con maggior semplicità in un sistema digitale che in uno analogico. Un esempio importante di servizio digitale multiutente, non facilmente sostituibile da un servizio analogico, è rappresentato dalla posta elettronica.
3. I messaggi digitali possono essere memorizzati e recuperati elettronicamente in modo più semplice ed economico rispetto ai segnali analogici.

Sistemi di comunicazione digitali

4. I messaggi digitali possono essere facilmente crittati. Si pensi, in proposito, all'importanza della protezione di dati riservati trasmessi nelle reti di comunicazione di ampia estensione geografica.
5. Nelle trasmissioni digitali per collegamenti su lunga distanza si possono utilizzare ripetitori rigenerativi. Questi ripetitori, ricostruendo il segnale al termine di ciascuna tratta in cui il collegamento è suddiviso, impediscono il progressivo accumulo del rumore e della distorsione che si verifica nei sistemi analogici tradizionali.
6. Alcune tecniche di trasmissione digitale possono essere impiegate senza grandi difficoltà pratiche in alcuni mezzi trasmissivi economici, come la fibra ottica, per i quali le tecniche analogiche sono di difficile impiego.
7. Utilizzando delle tecniche di codifica di sorgente e di modulazione spettralmente efficienti possibile conseguire un risparmio di banda.